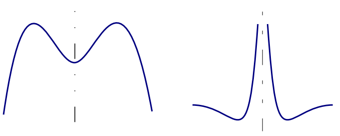
A.17 Symmetrie von Funktionen

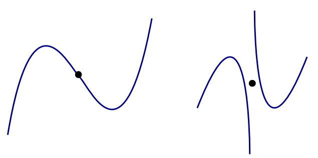
Es gibt zwei Arten von Symmetrie: Punktsymmetrie und Achsensymmetrie.

Eine Funktion ist punktsymmetrisch, wenn es irgendeinen Punkt gibt, an dem man die Funktion derart spiegeln kann, dass als Spiegelbild wieder die gleiche Funktion `rauskommt.

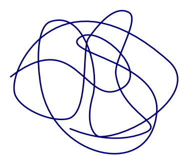
Eine Funktion ist achsensymmetrisch, wenn es eine Gerade [also eine Achse] gibt, an der man die Funktion derart spiegeln kann, dass als Spiegelbild wieder die gleiche Funktion `rauskommt.



achsensymmetrische Funktionen



punktsymmetrische Funktionen



keine Symmetrie [1]

Normalerweise interessiert man sich bei Symmetrie nur für *Punktsymmetrie zum Ursprung* und für *Achsensymmetrie zur y-Achse*.

Um die Symmetrie einer Funktion nachzuweisen gibt es zwei Formeln:

f(-x) = f(x)	⇒	Achsensymmetrie zur y-Achse
f(-x) = -f(x)	⇒	Punktsymmetrie zum Ursprung

1 Titel dieses Kunstwerkes: „Die Klarheit der Gedanken".
Die Rechte für das Kunstwerk können für einen hohen sechsstelligen Betrag erworben werden.

A.17.01 Symmetrieregeln für Weicheier

Bei **ganzrationalen Funktionen** schaut man nur auf die Hochzahlen von „x".

Gibt es nur **gerade Hochzahlen**, ist f(x) symmetrisch zur y-Achse.
Beispiel 1: $f(x) = 2x^6-2{,}5x^4-5$ [1] $g(x) = 0{,}3x^{-2}-3tx^2+6t^2x^4$

Gibt es nur **ungerade Hochzahlen**, ist f(x) symmetrisch zum Ursprung.
Beispiel 2: $h_t(x) = 2x^5+12x^3-2x$ $i(x) = 2x^{-1}+\pi x^{-3}-3\pi^2x^{-5}+x^3-4x$

Gibt es gemischte Hochzahlen, ist f(x) nicht symmetrisch.
Beispiel 3: $j(x) = x^3+2x^2-3x+4$ $k(x) = 2x\cdot(x^3+6x^2+9x)$ [2]

A.17.02 Symmetrie zum Ursprung und zur y-Achse

Um die Symmetrie einer Funktion nachzuweisen, gibt es zwei Formeln:

$$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Achsensymmetrie zur y-Achse}$$
$$f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

Man wendet die Formel folgendermaßen an:
Man setzt in die Funktion, die man überprüfen will, statt dem „x" ein „(-x)" ein (man berechnet also f(-x)). Danach vereinfacht man die Funktion.
Wenn nun wieder die Funktion f(x) rauskommt, hat man eine Achsensymmetrie zur y-Achse und ist natürlich fertig.
Sollte nicht wieder f(x) rauskommen, kann man noch ein Minus ausklammern, um zu schauen, ob man vielleicht -f(x) erhält. Wenn auch das nicht der Fall ist, ist f(x) weder zum Ursprung noch zur y-Achse symmetrisch und man geht frustriert heim.

Aufgabe 4
Untersuchen Sie $f(x) = 2x^6-2{,}5x^4-5$ auf Symmetrie.

Aufgabe 5
Untersuchen Sie $f(x) = 2x^5+12x^3-2x$ auf Symmetrie.

1 Zahlen, die mit keinem „x" verbunden sind, gelten als gerade Hochzahlen (denn $5 = 5\cdot x^0$)
2 Zuerst ausmultiplizieren.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie $f(x) = x^3+2x^2-3x+4$ auf Symmetrie.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie $f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+2}$ auf Symmetrie.

Aufgabe 8

Untersuchen Sie $f(x) = \frac{1}{2t}x\cdot\left(x^2-t\right)^2$ auf Symmetrie.

Lösung von Aufgabe 4:

$f(-x) = 2(-x)^6-2{,}5(-x)^4-5 = 2x^6-2{,}5x^4-5 = f(x)$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

Beispiel einer
Symmetrie zur y-Achse!

Lösung von Aufgabe 5:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\cdot(-x)^5+12\cdot(-x)^3-2\cdot(-x) \\ &= 2\cdot(-x^5)+12\cdot(-x^3)+2\cdot x \\ &= -2x^5-12x^3+2x \end{aligned}$$

Beispiel einer
Symmetrie zum Ursprung!

[Es ist *keine* Achsensymmetrie, da nicht f(x) rausgekommen ist. Wir klammern ein Minus aus, um zu prüfen, ob´s vielleicht punktsymmetrisch ist.]

$$\begin{aligned} &= -(2x^5+12x^3-2x) \\ &= -\ \ (\ f(x)\ ) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Lösung von Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3+2(-x)^2-3(-x)+4 \\ &= -x^3+2\cdot x^2+3x+4 \end{aligned}$$

[$\neq$f(x), also „-“ ausklammern]

$$= -(x^3-2x^2-3x-4)$$

Beispiel einer
Funktion ohne Symmetrie!

In der Klammer steht wieder nicht genau f(x).
Die Funktion ist also weder zum Ursprung,
noch zur y-Achse symmetrisch.

Lösung von Aufgabe 7:

Beispiel einer
Symmetrie zur y-Achse!

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-3}{2(-x)^2+2} = \frac{x^2-3}{2x^2+2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

Lösung von Aufgabe 8:

$$f(-x) = \frac{1}{2t}\cdot(-x)\cdot\left((-x)^2-t\right)^2 = -\frac{1}{2t}x\cdot\left(x^2-t\right)^2 = -f(x)$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

Beispiel einer
Symmetrie zum Ursprung!

A.17.03 Symmetrie zu Punkten und Achsen über Formeln

Ist eine Funktion symmetrisch zu irgendeinem Punkt mit den Koordinaten S(a|b), so gilt die Formel:

$f(a-x)+f(a+x) = 2\cdot b$

Ist eine Funktion symmetrisch zu irgendeiner senkrechten Gerade mit der Gleichung x=a, so gilt:

$f(a-x) = f(a+x)$

[Man setzt a,b und die Funktion f(x) in die Formel ein, löst alle Klammern etc. auf und erhält zum Schluss eine wahre Aussage. Die Rechnungen sind oft aufwändig.]

Punktsymmetrie
zum Punkt ***S(a|b)***
$\boldsymbol{f(a-x)+f(a+x)=2b}$

Achsensymmetrie
zur Gerade ***x=a***
$\boldsymbol{f(a-x) = f(a+x)}$

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass $f(x)=2x^2-8x+5$ zu x=2 achsensymmetrisch ist.

Aufgabe 10

Zeigen Sie: $f(x)=x^3+6x^2+9x+5$ ist punktsymmetrisch!

Lösung von Aufgabe 9:

Die Symmetrieachse ist x=2, also gilt die Formel:

$f(2-x) = f(2+x)$

$2\cdot(2-x)^2-8\cdot(2-x)\cancel{+5} = 2\cdot(2+x)^2-8\cdot(2+x)\cancel{+5} \quad | -5$

$2\cdot(4-4x+x^2)\cancel{-16}+8x = 2\cdot(4+4x+x^2)\cancel{-16}-8x \quad | +16$

$8-8x+2x^2 + 8x = 8+8x+2x^2 - 8x \quad$ | zusammenfassen

$8+2x^2 = 8+2x^2$

wahre Aussage ⇒ bewiesen.

f(2−x):
Man nimmt sich die Funktion f(x) zur Brust und ersetzt jeden Buchstaben „x" durch die Klammer „(2−x)". Also:
$f(2-x) = 2\cdot(2-x)^2 - 8\cdot(2-x) +5$
$= 2\cdot(4-4x+x^2) - 16+8x + 5 = \ldots$

f(2+x):
Nimmst du wider dem funkzion f(x). Haust du jedem Kack-„x" weg und schreibst du davür immer „(2+x)". Checkst du krass ab Alder.
$f(2+x) = 2\cdot(2+x)^2 - 8\cdot(2+x) +5$
$= 2\cdot(4+4x+x^2) - 16-8x + 5 = \ldots$

Lösung von Aufgabe 10:

Dummerweise ist der Symmetriepunkt nicht gegeben.
[In den allermeisten Aufgabe aber ist er jedoch gegeben.]

Der Symmetriepunkt einer Funktion dritten Grades kann nur der Wendepunkt sein.

Wendepunkt berechnen: [Kürzen wir hier stark ab!]

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+12=0 \Rightarrow x=-2$

y-Wert: $f(-2)=\ldots=3 \qquad \Rightarrow \qquad W(-2|3)$

Symmetriepunkte einer Funktion sind immer besondere Punkte [Wendepunkte, Schnittpunkte von Asymptoten, …]

Symmetrieachsen einer Funktion sind immer besondere senkrechte Geraden [senkrechte Geraden durch Extrema, senkrechte Asymptoten, …]

Der Symmetriepunkt von f(x) ist also: W(-2|3)

Wir wenden die Formel für Punktsymmetrie an:

$f(-2-x) + f(-2+x) = 2\cdot 3$

Nebenrechnung:

$f(-2-x) = (-2-x)^3+6\cdot(-2-x)^2+9\cdot(-2-x)+5 = (-2-x)^2\cdot(-2-x) + 6\cdot(4+4x+x^2) - 18-9x +5$
$= (4+4x+x^2)\cdot(-2-x) + 24+24x+6x^2 - 18-9x +5$
$= -8-4x-8x-4x^2-2x^2-x^3 + 24+24x+6x^2 - 18-9x +5 = \ldots = -x^3+3x+3$

$f(-2+x) = (-2+x)^3+6\cdot(-2+x)^2+9\cdot(-2+x)+5 = (-2+x)^2\cdot(-2+x) + 6\cdot(4-4x+x^2) - 18+9x +5$
$= (4-4x+x^2)\cdot(-2+x) + 24-24x+6x^2 - 18+9x +5$
$= -8+4x+8x-4x^2-2x^2+x^3 + 24-24x+6x^2 - 18+9x +5 = \ldots = x^3-3x+3$

$-x^3+3x+3 \; + \; x^3-3x+3 = 6$

$6 = 6$

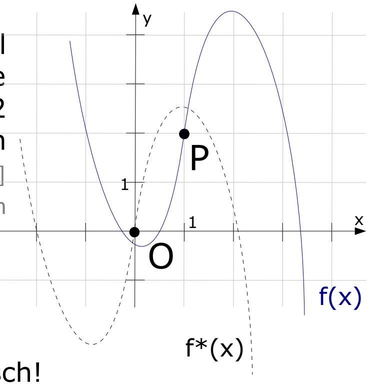
Wahre Aussage ⇒ Punktsymmetrie ist bewiesen.

A.17.04 Symmetrie zu Punkten und Achsen über Verschieben

Wenn eine Funktion symmetrisch zu irgend einem Punkt ist, verschiebt man die Funktion so weit nach links/rechts und oben/unten, bis der Symmetriepunkt im Ursprung liegt. Nun kann man für die neue, verschobene Funktion Symmetrie zum Ursprung nachweisen [einfach über $f(-x)=-f(x)$].

Wenn eine Funktion symmetrisch zu irgend einer Achse ist, verschiebt man die Funktion so weit nach links/rechts, bis die Symmetrieachse auf der y-Achse liegt. Nun kann man für die neue Funktion Symmetrie zur y-Achse nachweisen [einfach über $f(-x)=f(x)$].

Nehmen wir mal an, eine Funktion f(x) soll symmetrisch zum Punkt P(1|2) sein. Wenn man diese Funktion um 1 nach links verschiebt und dann um 2 nach unten, müsste die neue, verschobene Funktion [ich habe sie f*(x) genannt und gestrichelt dargestellt] symmetrisch zum Ursprung sein. [Diese Symmetrie zum Ursprung könnte man dann über $f(-x)=-f(x)$ beweisen].



Aufgabe 11 $f(x) = x^3-6x^2+9x-5$

Zeigen Sie: f(x) ist zum Punkt S(2|-3) symmetrisch!

Aufgabe 12 $f_t(x) = 0{,}6t\cdot(6x+x^2)$

Zeigen Sie, dass $f_t(x)$ zur Geraden x=-3 symmetrisch ist!

Aufgabe 13

Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{2x^2+5x}{x+3}$ zum Punkt A(-3|-7) punktsymmetrisch ist!

Lösung von Aufgabe 11:

Wir zeigen das so: Zuerst verschieben wir f(x) um 2 nach links, dann um 3 nach oben. Jetzt müsste der Symmetriepunkt im Ursprung liegen.

$$
\begin{aligned}
f^*(x) &= f(x+2) + 3 \\
&= (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 9(x+2) - 5 + 3 = \dots \\
&=(x^3+6x^2+12x+8)-6\cdot(x^2+4x+4)+9x+18-5+3 \\
&= x^3+6x^2+12x+8-6x^2-24x-24+9x+18-5+3 \\
&= x^3 - 3x
\end{aligned}
$$

Man verschiebt eine Funktion um 2 nach links, indem man jedes „x" der Funktion f(x) durch „(x+2)" ersetzt.

Man verschiebt eine Funktion um 3 nach oben, indem man hinter die Funktion noch ein „+3" dran hängt.

zu „Verschieben" siehe →Kap.A.23.01

Die erhaltene Funktion $f^*(x)=x^3-3x$ ist symmetrisch zum Ursprung, da sie nur ungerade Hochzahlen enthält. [Den Beweis über $f(-x)=-f(x)$ brauchen wir gar nicht!]

Die Ausgangsfunktion f(x) ist symmetrisch zu S(2|-3)!

Lösung von Aufgabe 12:
Wenn f(x) symmetrisch zu x=-3 ist, können wir f(x) um 3 nach rechts verschieben, dann ist die verschobene Funktion f*(x) symmetrisch zu x=0 [y-Achse].

$$f^*(x) = f(x-3) = 0{,}6t\cdot[\ 6(x-3) + (x-3)^2\ ]$$
$$= 0{,}6t\cdot[\ 6x-18 + x^2-6x+9\ ] = 0{,}6t\cdot[\ x^2-9\ ]$$

Man verschiebt eine Funktion um 3 nach rechts, indem man jedes „x" der Funktion f(x) durch „(x−3)" ersetzt.

zu „Verschieben" siehe →Kap.A.23.01

Die neue, verschobene Funktion hat nur gerade Hochzahlen in x. Sie ist also symmetrisch zur y-Achse. Spaßeshalber können wir noch den richtigen Beweis durchführen:

$$f^*(-x) = f^*(x)$$
$$0{,}6t\cdot[(-x)^2-9] = 0{,}6t\cdot[x^2-9]$$
$$0{,}6t\cdot[x^2-9] = 0{,}6t\cdot[x^2-9]$$

wahre Aussage ⇒ Symmetrie ist bewiesen.

Lösung von Aufgabe 13:
Der Symmetriepunkt liegt bei (-3|-7).
Also verschieben wir f(x) um 3 nach rechts und 7 hoch.

$$f^*(x) = f(x-3) + 7 = \frac{2(x-3)^2+5(x-3)}{(x-3)+3}+7$$
$$= \frac{2\cdot(x^2-6x+9)+5x-15}{x-3+3}+7 = \frac{2x^2-12x+18+5x-15}{x}+7$$
$$= \frac{2x^2-7x+3}{x}+\frac{7}{1} = \frac{2x^2-7x+3}{x}+\frac{7x}{1x} = \frac{2x^2-7x+3+7x}{x} = \frac{2x^2+3}{x}$$

Um ein vernünftiges Ergebnis zu erhalten, sollte man den Bruch und die „7" zusammenrechnen. Dafür schreibt man die „7" als „$^7/_1$" erweitert mit „x". Jetzt hat man unten „x" als Hauptnenner und kann beide Brüche addieren.

Nun sollten wir zeigen, dass f*(x) punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$$f^*(-x) = -f^*(x)$$
$$\frac{2(-x)^2+3}{(-x)} = -\frac{2x^2+3}{x}$$
$$\frac{2x^2+3}{-x} = -\frac{2x^2+3}{x}$$

Ein Minuszeichen kann man von unten [oder von oben] aus dem Bruch einfach vor den Bruch ziehen. [Und umgekehrt.]

Wahre Aussage. Die verschobene Funktion f*(x) ist symmetrisch zum Ursprung, also ist f(x) symmetrisch zu S(2|-3)!

A.17.05 Symmetrie von Ableitungen

Wenn eine Funktion symmetrisch ist, zeigt sowohl ihre Ableitung, als auch ihre Stammfunktion ebenfalls Symmetrieeigenschaften auf.

Symmetrie von Ableitungen:
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zum Ursprung,
dann ist ihre Ableitung f'(x) symmetrisch zur y-Achse.
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zur y-Achse,
dann ist ihre Ableitung f'(x) symmetrisch zum Ursprung.

Symmetrie von Stammfunktionen:
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zum Ursprung,
dann ist ihre Stammfunktion F(x) symmetrisch zur y-Achse.
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zur y-Achse,
ist ihre Stammfunktion F(x) symmetrisch zu irgendeinem Punkt der y-Achse.
[also nicht unbedingt zum Ursprung!]

Aufgabe 14
Sei $f(x)=6x^3+14x$
Was kann man zur Symmetrie de Ableitungsfunktion von f(x) aussagen?

Lösung von Aufgabe 14:
f(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da nur ungerade Hochzahlen vorkommen. In der Ableitung $f'(x) = 18x^2+14$ kommen nur gerade Hochzahlen vor, f'(x) ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.
In der Stammfunktion $F(x) = 2x^4+7x^2$ kommen ebenfalls nur gerade Hochzahlen vor, die Stammfunktion ist also auch achsensymmetrisch.