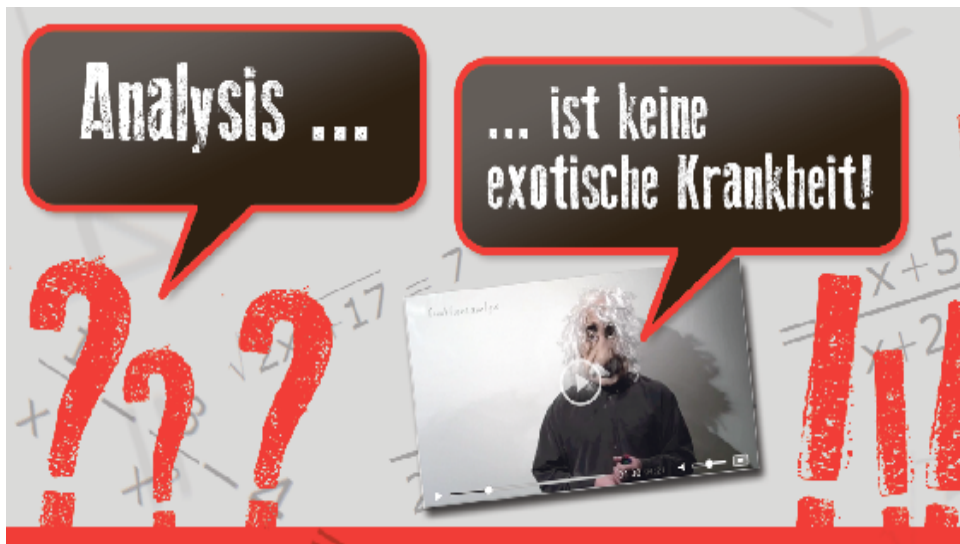




# Übungsaufgaben mit Lösungen

# Analysis [2]

**Funktionsanalyse**

**a-b-c-Formel / p-q-Formel**

**Tangenten / Normale**

**Ableitung / Integration**

**... und mehr**



Kostenlose Videos mit  
Rechenwegen  
auf **Mathe-Seite.de**

## **Kombiniere Lern-Videos mit Lern-Schriften - für bessere Noten.**

Du möchtest nicht nur die Lern-Videos schauen, sondern auch mal ein paar Übungsaufgaben rechnen oder Theorie nachlesen?

Dann nutze die kostenlosen Lern-Schriften!

Das Besondere an den Lern-Schriften ist, dass Struktur und Inhalte identisch mit den Lern-Videos auf der Mathe-Seite.de sind. Falls du also in den Lern-Schriften etwas nicht verstehst, findest du die nötigen Erklärungen im Lern-Video - am schnellsten via QR-Codes.

## **Lern-Schriften + Lern-Videos = bessere Noten**

Was dir das nützt: Dein Lernen wird wesentlich effektiver, denn du profitierst vom sogenannten "crossmedialen Effekt". Der kommt aus der Werbe-Psychologie und bewirkt, dass du die Thematik intensiver wahrnimmst, besser verstehst und länger memorierst. Das bietet übrigens nur die Mathe-Seite.de!

## **Das Mathe-Trainings-Heft (MTH)**

Das vorliegende Mathe-Trainings-Heft beinhaltet Rechenaufgaben und Lösungen speziell zur Prüfungsvorbereitung für Oberstufe und Abitur. Solltest du eine Aufgabe nicht lösen können, findest du den Rechenweg direkt per QR-Link im Lern-Video.

Zum Beispiel: Den Lösungsweg zu den Übungsaufgaben [A.12.06] findest du online auf der Mathe-Seite.de im Kapitel [A.12.06].

Vermutlich brauchst du nicht alle der im MTH enthaltenen Mathe-Themen. Unter [www.mathe-seite.de](http://www.mathe-seite.de) > [Abi-Themen nach Bundesland](#) findest du eine Liste mit denjenigen Themen, die für dein Bundesland und deine Schulart relevant sind.

## **Weitere kostenlose Lern-Schriften auf der MatheSeite**

- Die Lernbuch-Reihe – detailliertes Fachwissen in mehreren Bänden
- Die Lern-Kartei-Karten – handlich und clever
- Die Formelsammlung – das unverzichtbare Nachschlagewerk
- Die Anleitungen für Grafische Taschenrechner – endlich verständlich



## A.11 | Bedeutung von $f, f', f'', F, \dots$



### A.11.01 | Bedeutung vom $y$ -Wert

- [01] Bestimmen Sie den **y-Wert** von  $f(x)=x^2-6x+3$  bei  $x=1$ .  
 [02] Die Temperatur in einem Ofen wird durch  $T(t)=250-1,3^t$  beschrieben.  
 Bestimmen Sie die **Temperatur** nach 12 Minuten.  
 [03] Der Punkt  $B(a|10)$  liegt auf der Funktion  $f(x)=x^3+2$ . Bestimmen Sie **a**!



### A.11.02 | Bedeutung der Steigung

- [01] Bestimme die **Steigung** von  $f(x)=x^2-6x+3$  bei  $x=1$ .  
 [02] Welche **Steigung** hat die Tangente an  $g(x)=x^3-8x$  in  $A(2|-8)$ ?  
 [03] In welchem **Punkt** hat  $h(x)=x^2+5x-6$  die Steigung  $m=3$ ?



### A.11.03 | Links- / Rechtskrümmung

- [01] Prüfen Sie, ob  $f(x)=x^2-6x+3$  bei  $x=1$  **links- oder rechtsgekrümmt** ist.  
 [02] In welchem Bereich ist  $g(x)=x^3-8x$  **linksgekrümmt**?  
 [03] In welchem Bereich ist  $h(x)=2x^3+3x^2-2x+5$  **rechtsgekrümmt**?

### A.11.04 | Flächen

Aufgaben zu diesem Thema finden Sie in Kap.A.14 sowie Kap.A.18.



### A.11.05 | Definitionsmenge

Bestimmen Sie die Definitionsmenge von:

- [01]  $f(x) = \frac{x+3}{2x-4}$  [02]  $g(x) = \sqrt{2x+8}$  [03]  $h(x) = \sqrt[3]{4+6x}$   
 [04]  $i(x) = 2 \cdot \ln(2x+8)$  [05]  $j(x) = 2 \cdot 3^x + 2\cos(\pi \cdot x + 1) - x^2$



### A.11.06 | Wertemenge

Bestimmen Sie die Wertemenge von:

- [01]  $f(x)=x^2-6x$  [02]  $g(x) = \frac{1}{x}$  [03]  $h(x)=x^3-2x+1$   
 [04]  $f(x)=-2 \cdot (x+3)^2+5$  [05]  $g(x)=x^4+4x^3+12$



### A.11.07 | Monotonie

- [01] Untersuchen Sie  $f(x)=2x^2+6x$  auf **Monotonie**.  
 [02] Untersuchen Sie  $g(x)=x^3+2x+3$  auf **Monotonie**.  
 [03] In welchem Bereich ist  $h(x)=0,2 \cdot (2x-7)^5+1$  **monoton**?  
 [04] In welchem Bereich ist  $i(x)=x^4+4x^3+12$  **streng monoton fallend**?



### A.11.08 | Krümmungsradius / Bogenlänge

- [01] Bestimmen Sie den **Krümmungsradius** von  $f(x)=x^2-4$  an der Stelle  $x=1$ .  
 [02] Bestimmen Sie den **Krümmungsradius** von  $g(x)=x^3-x^2$  im Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse. An welcher Stelle ist der **Krümmungsradius minimal**? (Letzte Frage nur lösen, falls Sie mit einem GTR/CAS arbeiten).  
 [03] Bestimmen Sie die **Bogenlänge** der Funktion  $f(x)=e^{0,5x}+e^{-0,5x}$  im Intervall  $I=[-2;2]$ .  
 [04] Bestimmen Sie die **Bogenlänge** der Funktion  $g(x)=-x^2+4$  im ersten Quadranten. (Nur mit GTR/CAS lösbar!)

## A.12 | Nullstellen / Gleichungen lösen

### A.12.01 | Auf Form bringen

Lösen Sie die Gleichung:

|                                             |                                                                   |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| [01] $2 \cdot (x+4) + 12 = 5(x+4) - 2(x+1)$ | [02] $(x-4) \cdot (x+2) + 5 \cdot (x+1) = x \cdot (x+1) + 3$      |
| [03] $\frac{2}{x} + 1 = \frac{3}{x-2}$      | [04] $\frac{x-5}{3} = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{4}$                |
| [05] $\sqrt{4x-7} + 1 = 2x-4$               | [06] $\sqrt{x^2-11} = 5$                                          |
| [07] $(1+2x)^2 - x \cdot (2+x) = (x+1)^2$   | [08] $(x+2)^3 - 6(x+1)^2 = 2$                                     |
| [09] $\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+1}{x-2}$    | [10] $\frac{x-2}{2x^2-x} + \frac{9}{4x^2-1} = \frac{x+5}{x+2x^2}$ |
| [11] $-x+1 = \sqrt{x^2-5}$                  | [12] $\sqrt{\frac{2x^2-5}{x^2-1}} - 1 = 0$                        |



### A.12.02 | einfache Gleichungen, die nur ein einziges „x“ enthalten

Lösen Sie die Gleichung:

|                                     |                                  |                                                     |
|-------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------|
| [01] $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{4}$  | [02] $2 \cdot (x-3)^4 - 12 = 20$ | [03] $\sqrt{2x^2+17} = 7$                           |
| [04] $\sqrt[3]{\sqrt{x-1}-2-3} = 1$ | [05] $\frac{12}{x^3+3} = 4$      | [06] $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2^x-4) = \sqrt{12}$ |



### A.12.03 | Ausklammern

Lösen Sie die Gleichung:

|                                                       |                                                                    |                               |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| [01] $-x^2+6x=0$                                      | [02] $x^5-9x^3=0$                                                  | [03] $x^3+4x^2-5x=0$          |
| [04] $2x^3=5x^2$                                      | [05] $t^2x^3+8t^2=0$                                               | [06] $x^4-5x^3-6x^2=0$        |
| [07] $\frac{1}{2} \cdot x^3-2x^2+3x=0$                | [08] $-6x^7+24x^6-24x^5=0$                                         | [09] $2x^{11}+12x^{10}=14x^9$ |
| [10] $(x+3) \cdot (x^2-2x-1) + (x+3) \cdot (x-1) = 0$ | [12] $2^x \cdot x^3 + 3 \cdot 2^x \cdot x^2 + 2^{x+1} \cdot x = 0$ |                               |



### A.12.04 ; A.12.05 | Mitternachtsformeln (a-b-c-Formel; p-q-Formel)

Lösen Sie die Gleichung:

|                       |                      |                                    |
|-----------------------|----------------------|------------------------------------|
| [01] $x^2+4x-5=0$     | [02] $2x^2-12x-14=0$ | [03] $x^2+10x+25=0$                |
| [04] $x^2-4x+6=0$     | [05] $4x^2+4x+1=0$   | [06] $\frac{3}{x}+x=4$             |
| [07] $x^2-6x+12=0$    | [08] $4x^2-8x+3=0$   | [09] $(x-4) \cdot (x+6) + 16 = 0$  |
| [10] $x^2-5tx+4t^2=0$ | [11] $2x^2-5x+3k=0$  | [12] $\frac{1}{3a}x^2+4ax+15a^3=0$ |



### A.12.06 | Substitution

Lösen Sie die Gleichung:

|                        |                                        |                                           |
|------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------|
| [01] $x^4-5x^2+4=0$    | [02] $x^4+x^2-6=0$                     | [03] $2x^6-56x^3+54=0$                    |
| [04] $x^6-3x^4+4x^2=0$ | [05] $\frac{1}{x^4}-\frac{3}{x^2}-4=0$ | [06] $x-3\sqrt{x}-10=0$                   |
| [07] $x^6-2x^3-8=0$    | [08] $2x^4+16x^2+30=0$                 | [09] $x^{12}-3x^6+2=0$                    |
| [10] $x-6\sqrt{x}+8=0$ | [11] $4^x-9 \cdot 2^x+2^3=0$           | [12] $(2x^3-11)^4+4 \cdot (2x^3-11)^2=45$ |



### A.12.07 | Polynomdivision

Lösen Sie die Gleichung:

|                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| [01] $x^3-6x^2+11x-6=0$ | [02] $x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0$ |
| [03] $x^3-3x^2+3x-1=0$  | [04] $x^3-5x^2+3x+9=0$         |
| [05] $x^3-x^2-17x-15=0$ | [06] $3x^3-6x^2-18x+36=0$      |





### A.12.08 | Horner-Schema

Lösen Sie die Gleichung:

$$[01] x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$[02] x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$$

$$[03] x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$[04] x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$$

$$[05] x^3 - x^2 - 17x - 15 = 0$$

$$[06] 3x^3 - 6x^2 - 18x + 36 = 0$$



### A.12.09 | Vermischte Aufgaben

Lösen Sie die Gleichung:

$$[01] (x-2) \cdot (x-4) = 0$$

$$[02] (x-2) \cdot (x-4) + 1 = 0$$

$$[03] \frac{1}{12}x^5 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x = 0$$

$$[04] \frac{1}{t}x + 5x - 1 = 5t$$

$$[05] \frac{1}{2z} \cdot x \cdot (x-3z)^2 = 0$$

$$[06] (t+2) \cdot (x^3+5x) = 0$$

$$[07] r(x+1) + 5r = 4(r+x) - 3$$

$$[08] \frac{x+3}{x-1} = 0$$

$$[09] \frac{x+3}{x-1} = 6-x$$

$$[10] (x+4) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-5)^5 = 0$$

$$[11] -x^2 + 4x - 2 + 3 = 0$$

$$[12] a + 6 + a^2x^2 - a^3 + x^2 = 0$$

### A.12.10 | Verwandte Themen finden Sie hier:

Kapitel A.41.01, „Nullstellen bei e-Funktionen“

Kapitel A.42.02, [A.42.03] „Nullstellen bei sin/cos-Funktionen“

Kapitel A.43.01, „Nullstellen bei gebrochen-rationalen Funktionen“

Kapitel A.44.05, „Nullstellen bei Logarithmus-Funktionen“

Kapitel A.45.05, „Nullstellen bei Wurzel-Funktionen“

## A.13 | Ableitungen



### A.13.01 | Polynome

Bestimmen Sie *die Ableitung der Funktion*.

$$[01] f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 8$$

$$[02] g(x) = 0,5x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6,3x + 1,23$$

$$[03] h(x) = 4x^{-7} + 2x^{0,5} - 3x^{-5} + 2x^{-3,4}$$

$$[04] f_t(x) = 2t \cdot x^3 + (t^2 - 4) \cdot x^2 + \frac{2t}{3}x + t^2$$

$$[05] g_t(x) = \sin(1-t) + \sqrt{\frac{t-8}{3} + \frac{8}{t^2}}$$

$$[06] h(x) = 4x \cdot (\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3)$$



### A.13.02 | Wurzeln / Brüche

Bestimmen Sie *die Ableitung der Funktion*.

$$[01] f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$$

$$[02] g(x) = \frac{5}{2x} - \frac{2t}{3x^6}$$

$$[03] h(x) = 4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^9}$$

$$[04] i(x) = 2x^{-4} + \frac{3}{x^2} - 6x^{-0,25} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$[05] j(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 6x + 8}{2x^2}$$

$$[06] h(x) = 2\sqrt{x} \cdot (x+3)$$



### A.13.03 | Kettenregel

Bestimmen Sie *die Ableitung der Funktion*.

$$[01] f(x) = 2 \cdot (3x+1)^4$$

$$[02] g(x) = 4 \cdot (4-2x^3)^2$$

$$[03] h(x) = \frac{5}{(3-2x)^3}$$

$$[04] i(x) = \frac{2a^2}{(a+3x)^4}$$

$$[05] j(x) = 2\sqrt{x+1}$$

$$[06] i(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4x^2 + 4,5}$$

### A.13.04 | Produktregel

Bestimmen Sie **die Ableitung der Funktion**.

[01]  $f(x) = x^2 \cdot (x+5)$

[03]  $h(x) = (3-x)^2 \cdot (2x+4)^3$

[05]  $g(x) = x \cdot \sqrt{x^2-3^2}$

[02]  $g(x) = 2x \cdot \sqrt{x-3}$

[04]  $f(x) = (2x-1)(x+3)^2$

[06]  $h(x) = (2+x)^4 \cdot (2x+4)^3$



### A.13.05 | Quotientenregel

Bestimmen Sie **die Ableitung der Funktion**.

[01]  $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$   $f'(x)=?$ ,  $f''(x)=?$

[03]  $h(x) = 4 - \frac{6x}{x^2+1}$   $h'(x)=?$ ,  $h''(x)=?$

[05]  $g(x) = \frac{x^3+5x^2-6x+8}{2x^2}$   $g'(x)=?$

[02]  $g(x) = \frac{x^2+6x}{2x-1}$   $g'(x)=?$

[04]  $f(x) = \frac{3x^2+5x}{(2x-1)^2}$   $f'(x)=?$

[06]  $h(x) = \frac{x^3-4x}{(2-x)^3}$   $h'(x)=?$



### A.13.06 | Vermischte Aufgaben

[01]  $f(x)=x \cdot (2x-1)^3$ . Welche **Steigung** hat die Tangente in  $O(0|0)$  ?

[02]  $f(x)=0,1x^4-x^2$ . Bestimmen Sie **Nullstellen** und **Extrema** von  $f(x)$ .  
Fertigen Sie eine Skizze von  $f(x)$ .

[03] In **welchem Punkt** verläuft die Tangente an  $f(x)=x^3+7x$  parallel zur Geraden  $y=-2x+5$  ?

[04] Bestimmen Sie die **Tangentensteigung** von  $g(x)=(x+1) \cdot \sqrt{(x-2)^3}$  im Punkt  $A(2|f(2))$ .

[05] Bestimmen Sie alle Punkte der Funktion  $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x}$  mit **waagerechter Tangente**.

[06] Bestimmen Sie die **momentane Änderungsrate**  $f(x)=0,5(2+x^2)^2$  im Punkt  $P(-1|f(-1))$  sowie die **durchschnittliche Änderungsrate** von  $f(x)$  im Intervall  $I=[0;2]$ .



### A.13.07 | Ableitungen zu vermischte Funktionstypen

Bestimmen Sie die **Ableitungen** der folgenden Funktionen:

[01]  $f(x) = x^2 + \sin(2x)$

[02]  $g(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$

[03]  $h(x) = 3\cos(\frac{1}{2}x) + e^{x+3}$

[04]  $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-x}$

[05]  $g(x) = \sqrt{\cos(2x)+1}$

[06]  $h(x) = 0,5 \cdot (e^{-2x}-3)^2$

[07]  $f(x) = 2x^2 \cdot \ln(3x+1)$

[08]  $g(x) = 2t^2 \cdot \ln(3x+1)$

[09]  $h(x) = x^2 \sqrt{x+\pi}$



### A.13.08 | Verwandte Themen finden Sie hier:

Kapitel A.41.03, A.41.04, „Ableitungen bei e-Funktionen“

Kapitel A.42.04, A.42.05, „Ableitungen bei sin/cos-Funktionen“

Kapitel A.43.02, A.43.03, „Ableitungen bei gebrochen-rationalen Funktionen“

Kapitel A.44.02, A.44.03, „Ableitungen bei Logarithmus-Funktionen“

Kapitel A.45.01, A.45.02, „Ableitungen bei Wurzel-Funktionen“

## A.14 | Stammfunktionen / Integrale

### A.14.01 | Polynome

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 8$  [02]  $g(x) = 0,5x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6,3x + 1,23$

[03]  $h(x) = 4x^{-7} + 2x^{0,5} - 3x^{-5} + 2x^{-3,4}$  [04]  $f_t(x) = 2t \cdot x^3 + (t^2 - 4) \cdot x^2 + \frac{2t}{3}x + t^2$

[05]  $g_t(x) = \sin(1-t) + \sqrt{\frac{t}{3} - \frac{8}{t^2}}$  [06]  $h(x) = 4x \cdot (\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3)$

### A.14.02 | Einfache Brüche und Wurzeln

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x+3}$  [02]  $g(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^2}$

[03]  $h(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 7}{2x^2}$  [04]  $g_t(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2t}{3x^6}$

[05]  $h(x) = 4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^9}$  [06]  $i(x) = 2x^{-4} + \frac{3}{x^2} - 6x^{-0,25} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

### A.14.03 | Lineare Substitution (umgekehrte Kettenregel)

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = 2 \cdot (3x+1)^4$  [02]  $g(x) = 4 \cdot (4-2x)^2$  [03]  $h(x) = \frac{5}{(3-2x)^3}$

[04]  $i_a(x) = \frac{2a^2}{(a-3x)^4}$  [05]  $j(x) = 2\sqrt{3x+4}$  [06]  $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{tx-6t^2}$

### A.14.04 | Stammfunktionen, die auf $\ln(..)$ führen

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = \frac{5}{x+3}$  [02]  $g(x) = \frac{2}{2x-8}$  [03]  $h_t(x) = \frac{3t}{t^2-7x}$

[04]  $f(x) = \frac{2x^2+6x-7}{2x^2}$  [05]  $g(x) = \frac{5}{2x^2} + \frac{5}{2x}$  [06]  $h(x) = \frac{1}{3(x-4)^2} + \frac{3}{2x-4}$

### A.14.05 | Produkt-Integration

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = x \cdot \sqrt{2x+3}$  [02]  $g(x) = (3x-6) \cdot (x+6)^5$  [03]  $h(x) = 3x^2 \cdot (x+6)^5$

[04]  $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot (4-2x)^5$  [05]  $g(x) = (2x+5) \cdot \sqrt{x-\pi}$  [06]  $h(x) = 0,5x \cdot e^{-0,5x+2}$

### A.14.06 | Integration durch Substitution

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = 2x \cdot (x^2+1)^4$  [02]  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x^3+3}$  [03]  $f(x) = \frac{2x^3}{x^4-8}$

[04]  $\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)} dx$  [05]  $\int 3,6x \cdot e^{-x^2+3} dx$

[06]  $\int \sqrt{x^4+3x^2} dx$  [Hinweis: Klammern Sie unter der Wurzel aus.]

### A.14.07 | Integration über Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie **die Stammfunktionen** der Funktion

[01]  $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-8}$

[02]  $g(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^3+2x^2+x}$

[03]  $h(x) = \frac{x^3+2x^2-x-6}{x^2-4}$

[04]  $i(x) = \frac{2x^4-6x^3-3x^2+21x-10}{x^3-2x^2-4x+8}$

[05]  $\int \frac{5x^2-26x+29}{x^3-6x^2+11x-6} dx$

[06]  $\int \frac{3x^3-4x^2+6x-1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$



## A.15 | Tangenten und Normale

### A.15.01 bzw. A.15.02 | Tangentengleichung

Bestimmen Sie **die Gleichung der Tangenten und Normalen** an  $f(x)$  im Punkt P.

[01]  $f(x) = -x^2+6x$  an  $P(1|?)$  [02]  $f(x) = x^3-4x$  an  $P(2|?)$

[03]  $f(x) = x^2-8x+7$  an  $P(4|?)$

[04] Bestimme die Tangente und Normale an  $f(x) = x^3-2x^2+2x+3$  im Schnittpunkt mit der y-Achse.

[05] Bestimme den Schnittpunkt der Tangenten an  $f(x) = -0,5x^4+8$  in den Nullstellen.

[06] Bestimme den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der Tangente und der Normalen an  $f(x) = x^2-2x-6$  in  $P(2|f(2))$  mit der x-Achse gebildet wird.



### A.15.03 | Wendetangente

Bestimmen Sie **die Wendetangente** von  $f(x)$

[01]  $f(x) = 0,25x^3-4x$

[02]  $f(x) = x^4-6x^2+5$

[03]  $f(x) = x^3+6x^2+9x$

[04]  $f(x) = x^3-6x^2+14x-13$

[05]  $f(x) = 0,1x^4-2,4x^2+9$

[06]  $f(x) = x^5+4x^3-5$



### A.15.04 | Tangente mit unbekanntem Berührungspunkt („Tangente von außen“)

Von Punkt A wird eine Tangente an  $f(x)$  gelegt.

[01]  $f(x) = 0,5x^3-2x^2+4x$  mit  $A(6|24)$  Bestimme **Berührungspunkt und Tangente**.

[02]  $g(x) = x^2-3x-4$  mit  $A(3|-8)$  Bestimme **Berührungspunkt**.

[03]  $h(x) = x^4-3x^2+4$  mit  $A(0|4)$  Bestimme **Berührungspunkt und Tangente**.

[04]  $f(x) = -0,25x^4+4$  mit  $A(0|16)$  Bestimme **Berührungspunkt und Tangente**.

[05]  $f(x) = x^3+3x-2$  mit  $A(1|1)$  Bestimme **Berührungspunkt und Tangente**.

[06]  $f(x) = -x^4+3x^2+x+4$  mit  $A(0|40)$  Bestimme **Berührungspunkt**.



### A.15.05 | Normale mit unbekanntem Berührungspunkt („Normale von außen“)

[01] Bestimme eine **Normale** an  $f(x) = x^2-4x+6$  durch  $A(-8|4)$ .

[02] Bestimme einen Punkt des Schaubilds von  $g(x) = 0,5x^3-3x$  in welchem die **Normale** an  $g$  durch den Punkt  $B(-3|-1)$  verläuft.

[03] Eine Normale an  $h(x) = x^2-4x+2$  im Punkt P geht durch den Punkt  $A(2|-1,5)$ . Bestimmen Sie die Lage von P.





## A.16 | Asymptoten



### A.16.01 | senkrechte Asymptoten

Bestimmen Sie die **senkrechten Asymptoten** der Funktion:

|                                         |                                          |                                              |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------|
| [01] $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$           | [02] $g(x) = \frac{2x^2+x}{x^2}$         | [03] $h(x) = 2 + \frac{1}{x}$                |
| [04] $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$       | [05] $g(x) = \frac{6-x}{x^3-4x}$         | [06] $h(x) = \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x^2-4x+3}$ |
| [07] $f(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}-6}$ | [08] $g(x) = \frac{-4x+12}{2\cos(2x)+3}$ | [09] $h(x) = 4 \cdot \ln(x+2)$               |



### A.16.02 | waagerechte/schiefe Asymptoten / Grenzwerte

Bestimmen Sie den **Grenzwert** der Funktion,  
bzw. **waagerechte oder schiefe Asymptoten** der Funktion:

|                                              |                                     |                                         |
|----------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------|
| [01] $f(x) = 2 + \frac{4}{x}$                | [02] $g(x) = \frac{4}{x^2-2}$       | [03] $h(x) = \frac{x-4}{x-2}$           |
| [04] $f(x) = \frac{2x^3+x^2-5x+6}{x^2+2x-3}$ | [05] $g(x) = \frac{\sin(x-4)}{x+1}$ | [06] $h(x) = \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}-6}$ |

## A.17 | Symmetrie



### A.17.01 | Symmetrie von ganzrationalen Funktionen

*Geben Sie die Symmetrieeigenschaften der Funktionen an:*

|                                   |                                       |                               |
|-----------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| [01] $f(x) = x^3 + 6x,$           | $g(x) = 0,1x^3 + 2x^{-4} + 3x^2 + 5,$ | $h(x) = 3x^4 - 2x + 5$        |
| [02] $f(x) = 2x^5 - 0,3x^3 + x,$  | $g_t(x) = 2x^4 + t^2x^2 - 6t,$        | $h_t(x) = 2t^2x^3 - x^2 + 3t$ |
| [03] $f(x) = 4x^3 + 3x^{-5} + 6,$ | $g(x) = 2x^{-7} + x - 3x^3,$          | $h(x) = x^2 + 2x^6 - x^{-4}$  |



### A.17.02 | Symmetrie am Ursprung bzw. an y-Achse

*Beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Funktionen:*

|                             |                                      |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| [01] $f(x) = x^3 + 6x,$     | $g(x) = 0,1x^8 + 2x^{-4} + 3x^2 + 5$ |
| [02] $h(x) = 3x^4 - 2x + 5$ | $f(x) = 2x^5 - 0,3x^3 + x$           |
| [03] $h(x) = 3x^4 - 2x + 5$ | $f(x) = 2x^5 - 0,3x^3 + x$           |



### A.17.03 ; A.17.04 | Symmetrie über Formeln und über Verschieben

*Weisen Sie nach, dass  $f(x)$  zum angegebenen Punkt S bzw. zur angegebenen Achse symmetrisch ist:*

|                                      |                         |
|--------------------------------------|-------------------------|
| [01] $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$    | Symmetriepunkt: S(1 -3) |
| [02] $f(x) = 0,5x^2 + 2x + 3$        | Symmetrieachse: x=-2    |
| [03] $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 14x - 3$ | Symmetriepunkt: S(-2 1) |
| [04] $f(x) = -x^2 + 2x$              | Symmetrieachse: x=1     |

## A.18 | Integrale und Flächeninhalte

### A.18.02 | Flächen zwischen $f(x)$ und $x$ -Achse

*Bestimmen Sie die Fläche, die von  $f(x)$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.*

[01]  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$     [02]  $f(x) = x^3 - 9x$     [03]  $f(x) = 0,1x^4 - 2,5x^2$

[04]  $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 2$  innerhalb der Grenzen  $x=0$  und  $x=3$

[05]  $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$  innerhalb der Grenzen  $x=0$  und  $x=3$

[06]  $h_a(x) = x^3 + 3ax^2$



### A.18.03 | Flächen zwischen zwei Funktionen

*Bestimmen Sie die Fläche, die von  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossen wird.*

[01]  $f(x) = -x + 3$      $g(x) = x^2 + 2x - 1$     [02]  $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 3$      $g(x) = -2x^2 + 2x + 3$

[03]  $f(x) = x^3 + 2x + 2$      $g(x) = 3x + 2$     [04]  $f(x) = -x^2 + 5$      $g(x) = \frac{4}{x^2}$

[05]  $f(x) = -x^2 + 5$      $g(x) = x^2 + 4x - 1$     [06]  $f(x) = -x^2 + 3t^2x - 2$      $g(x) = 2x^2 - 2$



### A.18.04 | Flächen zwischen drei Funktionen

*Bestimmen Sie, welche Fläche durch die drei Funktionen eingeschlossen wird.*

[01]  $f(x) = x^3 + 5$ ,  $g(x) = -x + 7$ ,  $y$ -Achse

[02]  $f(x) = x^3 + 5$ ,  $g(x) = -x + 7$ ,  $x$ -Achse

[03]  $f(x) = x^3 + 5$ , Tangente an  $f(x)$  in  $P(-1|?)$ ,  $x$ -Achse

[04]  $f(x) = -x^2 + 6x$ ,  $g(x) = -0,25x^2$ ,  $h(x) = 2x - 12$ .

Nur die Fläche im 1. und 4. Quadranten.

[05]  $f(x) = \sqrt{x}$ , Tangente an  $f(x)$  in  $x=4$ ,  $x$ -Achse.

[06]  $f(x) = -0,25x^4 + 4$ ,  $g(x) = -2x - 4$ ,  $h(x) = 2x - 4$ .



### A.18.05 | Uneigentliche Integrale (e-Funktion, Hyperbeln)

*Bestimmen Sie die Fläche, die von  $f(x)$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.*

[01]  $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{6}{x^2} dx$     [02]  $\lim_{z \rightarrow 0} \int_z^1 \frac{6}{x^2} dx$     [03]  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_4^a \frac{6}{\sqrt{x}} dx$     [04]  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^4 \frac{6}{\sqrt{x}} dx$

[05] Bestimme die unendlich lange Fläche, die von  $f(x) = 3x^4$ , den Koordinatenachsen und  $x=1$  gebildet wird.

[06] Bestimme die unendlich lange Fläche, die von  $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}$ , den Koordinatenachsen und  $x=4$  gebildet wird.



### A.18.06 | Rotationsvolumen

*Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung von  $f(x)$  um die  $x$ -Achse entsteht.*

[01]  $f(x) = -x^2 + 4$     [02]  $f(x) = 2\sqrt{-x^4 + 4x^3}$

[03] Bestimmen Sie das **Volumen des Körpers**, der bei Drehung der Fläche zwischen  $f(x) = x^2 + 2$  und  $g(x) = x + 4$  um die  $x$ -Achse entsteht.

[04]  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $g(x) = 0,5x$  bilden eine Fläche, die um die  $x$ -Achse rotiert. Bestimme das Volumen.

[05]  $f(x) = x^2 - x$  bildet mit der  $x$ -Achse und  $x=3$  eine Fläche, welche um die  $x$ -Achse rotiert. Bestimme das Rotationsvolumen.

[06] Die Halbkreisfunktion  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  rotiert um die  $x$ -Achse. Vergleichen Sie das entstehende Rotationsvolumen mit dem entsprechenden Kugelvolumen.





### A.18.07 | Mittelwert / Durchschnitt

*Bestimmen Sie den durchschnittlichen Funktionswert (=Mittelwert) von:*

- [01]  $f(x) = x^3 - 9x$  im 2. Quadranten      [02]  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  im Bereich  $[2; 4]$   
 [03] Durch  $T(t) = -t^2 + 6t$  wird im Zeitraum von  $t=0$  bis  $t=6$  die Temperatur eines Ofens beschrieben. Bestimmen Sie die **durchschnittliche Temperatur** des Ofens im betreffenden Zeitraum.



### A.18.08 | Dreiecksflächen

*Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche gebildet von:*

- [01]  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$  und den Koordinatenachsen  
 [02]  $g(x) = 2x + 6$ , der 1. Winkelhalbierenden und der x-Achse  
 [03] Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Tangente an  $f(x) = \sqrt{x}$  im Punkt  $A(4|2)$  und den Koordinatenachsen.  
 [04] Die Tangente und Normale an  $f(x) = x^2 - 4$  im Punkt  $P(1|-3)$  bilden mit der y-Achse eine Fläche. Bestimmen Sie ihren Inhalt.



### A.18.09 | zusammengesetzte Funktionen

*Bestimmen Sie die Fläche, die von  $f(x)$  und der x-Achse gebildet wird.*

- [01]  $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{für } x \geq 1 \\ -x^2+6x & \text{für } x < 1 \end{cases}$       [02]  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \leq 2 \\ (3-0,5x)^3 & \text{für } x > 2 \end{cases}$   
 [03]  $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{für } x \leq 0 \\ -x^2+4 & \text{für } x > 0 \end{cases}$  schließt mit der x-Achse und der senkrechten Geraden  $x=-2$  eine **Fläche** ein. Bestimmen Sie ihren Inhalt.



### A.18.10 | Integralfunktionen

- [01] Bestimmen Sie die **Integralfunktion**  $J_2(x) = \int_2^x f(t) dt$  zu  $f(x) = x^2 - 3x + 2$   
 [02] Bestimmen Sie die **Extremstellen der Integralfunktion**  $J_1(x) = \int_1^x \frac{k}{k^3+1} dk$   
 [03] Zeigen Sie, dass  $J(x) = \int_6^x (t-0,5)^{18} dt$  **genau eine Nullstelle** besitzt.  
 [04] Sei  $f(x) = x^2 + 3$ . Weisen Sie nach, dass die Integralfunktion  $J(x)$  **streng monoton wachsend** ist.  
 [05] Bestimmen Sie zu  $f(x) = 4x - 3x^2$  den Wert der Integralfunktion  $J_1(4)$ .  
 [06] Bestimmen Sie die Schnittpunkte von  $J_0(x) = \int_0^x t^2 - 2 dt$  mit der ersten Winkelhalbierenden.

## A.19 | Funktionsanalyse

### A.19.01 | $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2x^2 + 4$

- [01] Bilden Sie **drei Ableitungen** von  $g(x)$ .
- [02] Untersuchen Sie  $g(x)$  auf **Symmetrie**.
- [03] Berechnen Sie die **Nullstellen** von  $g(x)$ .
- [04] Berechnen Sie die **Extrempunkte** von  $g(x)$ .
- [05] Berechnen Sie die **Wendepunkte** von  $g(x)$ .
- [06] **Zeichnen** Sie  $g(x)$ .



### A.19.02 | $g(x) = -\frac{1}{80}x^5 + \frac{1}{3}x^3$

- [01] Bilden Sie **drei Ableitungen** von  $g(x)$ .
- [02] Untersuchen Sie  $g(x)$  auf **Symmetrie**.
- [03] Berechnen Sie die **Nullstellen** von  $g(x)$ .
- [04] Berechnen Sie die **Extrempunkte** von  $g(x)$ .
- [05] Berechnen Sie die **Wendepunkte** von  $g(x)$ .
- [06] **Zeichnen** Sie  $g(x)$ .
- [07] Berechnen Sie die **Steigungen der Wendetangenten** von  $g(x)$ .
- [08] Berechnen Sie die **Fläche** zwischen  $f(x)$  und  $x$ -Achse.



### A.19.03 | $h(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + 3x$

- [01] Bilden Sie **drei Ableitungen** von  $h(x)$ .
- [02] Untersuchen Sie  $h(x)$  auf **Symmetrie**.
- [03] Berechnen Sie die **Nullstellen** von  $h(x)$ .
- [04] Berechnen Sie die **Extrempunkte** von  $h(x)$ .
- [05] Berechnen Sie die **Wendepunkte** von  $h(x)$ .
- [06] **Zeichnen** Sie  $h(x)$ .
- [07] Berechnen Sie die **Wendenormale** von  $h(x)$ .
- [08] Berechnen Sie die **Fläche** zwischen  $h(x)$  und der an der  $x$ -Achse gespiegelten Funktion.



### A.19.04 | $f_t(x) = x^3 + 3tx^2 \quad t > 0$

- [01] Bilden Sie **drei Ableitungen** von  $g(x)$ .
- [02] Untersuchen Sie  $g(x)$  auf **Symmetrie**.
- [03] Berechnen Sie die **Nullstellen** von  $g(x)$ .
- [04] Berechnen Sie die **Extrempunkte** von  $g(x)$ .
- [05] Berechnen Sie die **Wendepunkte** von  $g(x)$ .
- [06] **Zeichnen** Sie  $g(x)$ .



### A.19.05 | $h_t(x) = \frac{1}{3} \cdot tx \cdot (4-x)^3 \quad t > 0$

- [01] Bilden Sie **drei Ableitungen** von  $g(x)$ .
- [02] Untersuchen Sie  $g(x)$  auf **Symmetrie**.
- [03] Berechnen Sie die **Nullstellen** von  $g(x)$ .
- [04] Berechnen Sie die **Extrempunkte** von  $g(x)$ .
- [05] Berechnen Sie die **Wendepunkte** von  $g(x)$ .
- [06] **Zeichnen** Sie  $g(x)$ .



## Ergebnisse

- [A.11.01] [01]  $y=-2$  [02]  $T=249,96$  [03]  $a=2$   
 [A.11.02] [01]  $m=-4$  [02]  $m=4$  [03]  $P(-1|-10)$   
 [A.11.03] [01] Linkskurve [02]  $x>0$  [03]  $x<-0,5$   
 [A.11.05] [01]  $D=\mathbb{R} \setminus \{2\}$  [02]  $D=\{x|x \geq -4\}$  [03]  $D=\mathbb{R}$   
 [04]  $D=\{x|x > -4\}$  [05]  $D=\mathbb{R}$   
 [A.11.06] [01]  $W=\{y|y \geq -9\}$  [02]  $W=\mathbb{R} \setminus \{0\}$  [03]  $W=\mathbb{R}$   
 [04]  $W=\{y|y \leq -5\}$  [05]  $W=\{y|y \geq -15\}$   
 [A.11.07] [01] für  $x > -1,5$ :  $f(x)$  streng monoton wachsend (steigend)  
 für  $x \geq -1,5$ :  $f(x)$  monoton wachsend (steigend)  
 für  $x < -1,5$ :  $f(x)$  streng monoton fallend (abnehmend)  
 für  $x \leq -1,5$ :  $f(x)$  streng monoton fallend (abnehmend)  
 [02] streng monoton steigend (wachsend) (für alle  $x \in \mathbb{R}$ )  
 [03] monoton steigend (wachsend) (für alle  $x \in \mathbb{R}$ )  
 [04] für  $x < -3$   
 [A.11.08] [01]  $r(1) \approx 5,6$  [02]  $r_{\min} \approx 0,41$   
 [03]  $b=2e-2e^{-1} \approx 4,7$  [02]  $b \approx 4,65$   
 [A.12.01] [01]  $x=2$  [02]  $x=3$  [03]  $x_1=-1, x_2=4$   
 [04]  $x=-11,5$  [05]  $x=2$  [06]  $x_{1,2} = \pm 6$   
 [07]  $x=0$  [08]  $x=0$  [09]  $x = \frac{7}{11}$   
 [10]  $x=1$  [11] keine Lös. [12]  $x_{1,2} = \pm 2$   
 [A.12.02] [01]  $x=7$  [02]  $x_1=5, x_2=1$  [03]  $x_{1,2} = \pm 4$   
 [04]  $x=325$  [05]  $x=0$  [06]  $x=3$   
 [A.12.03] [01]  $x_1=0, x_2=-6$  [02]  $x_{1,2,3}=0, x_{4,5}=\pm 3$  [03]  $x_1=0, x_2=1, x_3=-5$   
 [04]  $x_{1,2}=0, x_3=2,5$  [05]  $x=-2$  [06]  $x_1=0, x_2=2, x_3=3$   
 [07]  $x=0$  [08]  $x_1=0, x_2=2$  [09]  $x_1=0, x_2=1, x_3=-7$   
 [10]  $x_1=-3, x_2=-1, x_3=2$  [11]  $x=0$  [12]  $x_1=0, x_2=-1, x_3=-2$   
 [A.12.04] [01]  $x_1=1, x_2=-5$  [02]  $x_1=-1, x_2=7$  [03]  $x_{1,2}=-5$   
 [04] keine Lösung [05]  $x_{1,2}=-0,5$  [06]  $x_1=1, x_2=3$   
 [07] keine Lösung [08]  $x_1=0,5, x_2=1,5$  [09]  $x_1=2, x_2=-4$   
 [10]  $x_1=t, x_2=4t$  [11]  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24k}}{4}$  [12] keine Lösung  
 [A.12.05] [01]  $x_1=1, x_2=-5$  [02]  $x_1=-1, x_2=7$  [03]  $x_{1,2}=-5$   
 [04] keine Lösung [05]  $x_{1,2}=-0,5$  [06]  $x_1=1, x_2=3$   
 [07] keine Lösung [08]  $x_1=0,5, x_2=1,5$  [09]  $x_1=2, x_2=-4$   
 [10]  $x_1=t, x_2=4t$  [11]  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}k}}{4}$  [12] keine Lösung  
 [A.12.06] [01]  $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$  [02]  $x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$  [03]  $x_1=1, x_2=3$   
 [04]  $x=0$  [05]  $x_{1,2}=\pm 0,5$  [06]  $x=25$   
 [07]  $x_1=\sqrt[3]{4}, x_2=-\sqrt[3]{2}$  [08] keine Lös. [09]  $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm \sqrt[6]{2}$   
 [10]  $x_1=4, x_2=16$  [11]  $x_1=0, x_2=3$  [12]  $x_1=\sqrt[3]{4}, x_2=\sqrt[3]{7}$   
 [A.12.07], [A.12.08]  
 [01]  $x_1=1, x_2=2, x_3=3$  [02]  $x_{1,2,3,4}=2$   
 [03]  $x_{1,2,3}=1$  [04]  $x_1=-1, x_{2,3}=3$   
 [05]  $x_1=-1, x_2=-3, x_3=5$  [06]  $x_1=2, x_{2,3} = \pm \sqrt{6}$   
 [A.12.09] [01]  $x_1=2, x_2=4$  [02]  $x_{1,2}=-3$  [03]  $x_1=0, x_{2,3}=\pm 1, x_{4,5}=\pm \sqrt{8}$

$$[04] x=t \quad [05] x_1=0, x_{2,3}=3z \quad [06] x=0$$

$$[07] x=\frac{-2r-3}{r-4} \quad [08] x=-3 \quad [09] x=3$$

$$[10] x=-4, x=1, x=-2, x=5 \quad [11] x_{1,2}=\pm 2 \quad [12] x=\sqrt{\frac{a^3-a-6}{a^2+1}}$$

$$[A.13.01] [01] f'(x)=6x^2+10x-3, f''(x)=12x+10$$

$$[02] g'(x)=2x^3-9x^2+24x-6,3$$

$$[03] h'(x)=-28x^{-8}+x^{-0,5}+15x^{-6}-6,8x^{-4,4}$$

$$[04] f'_t(x)=6t \cdot x^2+2(t^2-4) \cdot x+\frac{2t}{3}$$

$$[05] g'_t(x)=0$$

$$[06] h'(x)=6x^2+40x-12$$

$$[A.13.02] [01] f'(x)=-\frac{6}{x^4}+\frac{3}{x^2} \quad [02] g'_t(x)=-\frac{5}{2x^2}+\frac{4t}{x^7}$$

$$[03] h'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{9\sqrt[4]{x^5}}{4} \quad [04] i'(x)=-8x^{-5}-6x^{-3}+1,5x^{-1,25}-1,5x^{-1,5}$$

$$[05] j'(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3} \quad [06] h'(x)=3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$[A.13.03] [01] f'(x)=24 \cdot (3x+1)^3 \quad [02] g'(x)=-48x^2 \cdot (4-2x^3)$$

$$[03] h'(x)=\frac{30}{(3-2x)^4} \quad [04] i'(x)=\frac{-24}{(a+3x)^5}$$

$$[05] j'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad [06] k'(x)=\frac{-24}{(a+3x)^5}$$

$$[A.13.04] \text{ (letzte Umformung ist nicht zwingend notwendig)}$$

$$[01] f'(x)=2x \cdot (x+5)+x^2=\dots=3x^2+10x$$

$$[02] g'(x)=2 \cdot (x-3)^{0,5}+x \cdot (x-3)^{-0,5}=\dots=\frac{3x-6}{\sqrt{x-3}}$$

$$[03] h'(x)=-2 \cdot (3-x) \cdot (2x+4)^3+6 \cdot (3-x)^2 \cdot (2x+4)^2=\\=(3-x) \cdot (2x+4)^2 \cdot [-10x+26]$$

$$[04] f'(x)=(x+3)(6x+4)=6x^2+22x+12$$

$$[05] g'(x)=\sqrt{x^2-9}+\frac{x^2}{x^2-9}$$

$$[06] h'(x)=(2+x)^3 \cdot (2x+4)^2 \cdot (14x+28)$$

$$[A.13.05] [01] f'(x)=\frac{11}{(x+4)^2} \quad f''(x)=-\frac{22}{(x+4)^3}$$

$$[02] g'(x)=\frac{2x^2-2x-6}{(2x-1)^2} \quad g''(x)=\frac{26}{(2x-4)^3}$$

$$[03] h'(x)=\frac{6x^2-6}{(x^2+1)^2} \quad h''(x)=\frac{-12x^3+36x}{(x^2+1)^3}$$

$$[04] f'(x)=\frac{-16x-5}{(2x-1)^3} \quad [05] g'(x)=\frac{x^3+6x^2-16}{x^3} \quad [06] h'(x)=\frac{6x^2-8x-8}{(2-x)^4}$$

$$[A.13.06] [01] m=-1$$

$$[02] N_{1,2}(0|0), N_{3,4}(\pm\sqrt{10}|0), H(0|0), T_{1,2}(\pm\sqrt{5}|-2,5)$$

$$[03] \text{keine Lösung (kein Punkt)}$$

$$[04] m=0$$

$$[05] \text{keine Lösung (kein Punkt)}$$

$$[06] \text{momentane \u00c4nd.rate} = -6, \quad \text{durchschnittliche \u00c4nd.rate} = 8$$

$$[A.13.07] [01] f'(x)=2x+2\cos(2x)$$

$$[02] g'(x)=2x \cdot \sin(2x)+2x^2 \cdot \cos(2x)$$

$$[03] h'(x)=\frac{3}{2}\sin(\frac{1}{2}x)+e^{x+3}$$

$$[04] f'(x)=(1-2x) \cdot e^{2-x}$$

$$[05] g'(x)=-\frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)+1}}$$

$$[06] h'(x) = -2e^{-2x} \cdot (e^{-2x} - 3)$$

$$[07] f'(x) = 4x \cdot \ln(3x+1) + \frac{6x^2}{3x+1}$$

$$[08] g'(x) = \frac{6t^2}{3x+1}$$

$$[09] h'(x) = 2x \sqrt{x+\pi} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+\pi}}$$

$$[A.14.01] [01] F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x$$

$$[02] G(x) = 0,1 \cdot x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1,2x$$

$$[03] H(x) = -\frac{2}{3}x^{-6} + 2x^{1,5} + \frac{3}{4}x^{-4} + \frac{2}{5}x^5$$

$$[04] F_t(x) = \frac{t}{2}x^4 + \frac{(t^2-4)}{3}x^3 + \frac{t}{3}x^2 + t^2x$$

$$[05] G_t(x) = \sin(1-t) \cdot x + \sqrt{\frac{t}{3} - \frac{8}{t^2}} \cdot x$$

$$[06] H(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 6x^2$$

$$[A.14.02] [01] F(x) = 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}\sqrt{(x+3)^3}$$

$$[02] G(x) = -\frac{2}{3x^3} + \frac{3}{x}$$

$$[03] H(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2x}$$

$$[04] G_t(x) = -\frac{5}{2x} + \frac{2t}{15x^5}$$

$$[05] H(x) = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{13}\sqrt[4]{x^{13}}$$

$$[06] I(x) = -\frac{2}{3}x^{-3} - 3x^{-1} - 8x^{0,75} + 6x^{0,5}$$

$$[A.14.03] [01] F(x) = \frac{2}{15}(3x+1)^5$$

$$[02] G(x) = -\frac{2}{3}(4-2x)^3$$

$$[03] F(x) = \frac{5}{4(3-2x)^5}$$

$$[04] I_a(x) = \frac{a^2}{3(a-3x)^2}$$

$$[05] J(x) = \frac{4}{9}\sqrt{(3x+4)^3}$$

$$[06] K(x) = \frac{1}{3t}\sqrt{(tx-6t^2)^3}$$

$$[A.14.04] [01] F(x) = 5 \cdot \ln|x+3|$$

$$[02] G(x) = \ln|2x-8|$$

$$[03] H(x) = -\frac{3t}{7} \cdot \ln|t^2-7x|$$

$$[04] F(x) = x + 3\ln(x) + \frac{7}{2x}$$

$$[05] H(x) = -\frac{5}{2x} - \frac{5}{2} \cdot \ln(x)$$

$$[06] F(x) = \frac{1}{3(x-4)} + \frac{3}{2} \cdot \ln(2x-4)$$

$$[A.14.05] [01] F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{(2x+3)^3} - \frac{1}{15}\sqrt{(2x+3)^5}$$

$$[02] G(x) = \frac{1}{6}(3x-6)(x+6)^6 - \frac{1}{14}(x+6)^7 = \dots = \frac{1}{7}(3x-10) \cdot (x+6)^6$$

$$[03] H(x) = \frac{1}{2}x^2(x+6)^6 - \frac{1}{7}x(x+6)^7 + \frac{1}{56}(x+6)^8 = \dots = \frac{1}{14} \cdot (5x^2-9x+9) \cdot (x+6)^6$$

$$[04] F(x) = -\frac{1}{24}x(4-2x)^6 - \frac{1}{336}(4-2x)^7$$

$$[05] G(x) = \frac{2}{3}(2x+5) \cdot \sqrt{(x-\pi)^3} - \frac{8}{15}(2x+5) \cdot \sqrt{(x-\pi)^5}$$

$$[06] H(x) = (-x-2) \cdot e^{-0,5x+2}$$

$$[A.14.06] [01] F(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)^5$$

$$[02] F(x) = \frac{1}{9}\sqrt{(2x^3+3)^3}$$

$$[03] \left[ \frac{1}{2} \ln|x^4-8| \right]_2^4 = \frac{1}{2} \ln(31)$$

$$[04] \frac{1}{2\cos(2x)}$$

$$[05] -1,8 \cdot e^{-x^2+3}$$

$$[06] \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}$$

$$[A.14.07] [01] 2 \cdot \ln|x-4| + \ln|x+2|$$

$$[02] 3 \ln|x| + \frac{2}{x+1}$$

$$[03] 0,5x^2 + 2x + 2 \ln|x-2| + \ln|x+2|$$

$$[04] x^2 - 2x - \frac{1}{x-2} + \ln|x+2|$$

$$[05] 4 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x-2| - 2 \cdot \ln|x-3|$$

$$[06] \ln|x| - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + 2 \ln x - 1$$

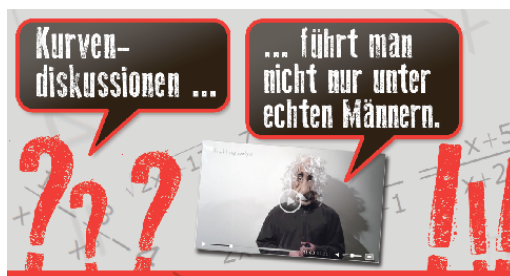
- [A.15.01] und [A.15.02]    [01]  $y_{\text{Tan}}=4x+1$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$
- [02]  $y_{\text{Tan}}=8x-16$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$
- [03]  $y_{\text{Tan}}=-9$      $x_N=4$
- [04]  $y_{\text{Tan}}=2x+3$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{1}{2}x+3$
- [05]  $N_{1,2}(\pm 2|0)$      $y_{\text{Tan } 1}=16x+32$      $y_{\text{Tan } 2}=-16x+32 \Rightarrow S(0|32)$
- [06]  $y_{\text{Tan}}=2x-10$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{1}{2}x-5$      $A=\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 = 45$
- [A.15.03] [01]  $y_{\text{Tan}}=-4x$      $y_{\text{Nor}} = \frac{1}{4}x$
- [02] in  $W_1(1|0)$ :  $y_{\text{Tan}}=-8x+8$      $y_{\text{Nor}} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$   
in  $W_2(-1|0)$ :  $y_{\text{Tan}}=8x+8$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$
- [03]  $y_{\text{Tan}}=-3x-8$      $y_{\text{Nor}} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$
- [04]  $y_{\text{Tan}}=2x-5$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{1}{2}x$
- [05] in  $W_1(2|1)$ :  $y_{\text{Tan}}=-6,4x+13,8$      $y_{\text{Nor}} = \frac{5}{32}x + \frac{22}{32}$   
in  $W_2(-2|1)$ :  $y_{\text{Tan}}=6,4x+13,8$      $y_{\text{Nor}} = -\frac{5}{32}x + \frac{22}{32}$
- [06]  $y_{\text{Tan}}=-5$      $x_N=0$
- [A.15.04] [01]  $B_1(0|0)$  mit  $y_{\text{Tan}}=4x$   
 $B_2(3|7,5)$  mit  $y_{\text{Tan}}=5,5x-9$   
 $B_3(8|160)$  mit  $y_{\text{Tan}}=68x-384$
- [02]  $B_1(1|-6)$ ,  $B_2(5|6)$
- [03]  $B_1(0|4)$  mit  $y_{\text{Tan}}=4$   
 $B_2(1|2)$  mit  $y_{\text{Tan}}=-2x+4$   
 $B_3(-1|2)$  mit  $y_{\text{Tan}}=2x+4$
- [04]  $B_1(2|0)$  mit  $y_{\text{Tan}}=-8x+16$   
 $B_2(-2|0)$  mit  $y_{\text{Tan}}=8x+16$
- [05]  $B_1(0|-2)$  mit  $y_{\text{Tan}}=3x-2$   
 $B_2\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{47}{8}\right)$  mit  $y_{\text{Tan}} = \frac{39}{4}x - \frac{35}{4}$
- [06]  $B_1(2|2)$ ,  $B_2(-2|-2)$
- [A.15.05] [01]  $B(0|6)$ ,  $y_{\text{Nor}} = \frac{1}{4}x+6$     [02]  $P(0|0)$     [03]  $P(2|-2)$
- [A.16.01] [01]  $x=2$     [02]  $x=0$     [03]  $x=0$   
[04] keine    [05]  $x_1=0$      $x_{2,3}=\pm 2$     [06]  $x_1=1$      $x_2=3$   
[07]  $x=\frac{1}{2} \cdot \ln(6)$     [08] keine    [09]  $x=-2$
- [A.16.02] [01] waagerechte Asy:  $y=2$   
[02] waagerechte Asy:  $y=0$   
[03] waagerechte Asy:  $y=1$   
[04] für  $x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm \infty$  (schiefe Asymptote)  
[05] waagerechte Asy:  $y=0$   
[06] waagerechte Asy:  $y=1$



- [A.17.01] [01]  $f(x)$ : Punktsymmetrie zum Ursprung  
 $g(x)$ : Achsensymmetrie zur y-Achse  
 $h(x)$ : keine Symmetrie erkennbar  
 [02]  $f(x)$ : Punktsymmetrie zum Ursprung  
 $g(x)$ : Achsensymmetrie zur y-Achse  
 $h(x)$ : keine Symmetrie erkennbar  
 [03]  $f(x)$ : keine Symmetrie erkennbar  
 $g(x)$ : Punktsymmetrie zum Ursprung  
 $h(x)$ : Achsensymmetrie zur y-Achse
- [A.17.02] [01]  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$  Punktsymmetrie zum Ursprung  
 $g(-x) = g(x) \Rightarrow$  Achsensymmetrie zur y-Achse  
 [02]  $h(x)$ : keine Symmetrie  
 $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$  Punktsymmetrie zum Ursprung  
 [03]  $g(-x) = g(x) \Rightarrow$  Achsensymmetrie zur y-Achse  
 $h(x)$ : keine Symmetrie
- [A.17.03] und [A.17.04]: Beweise. Kein Lösungsweg.

- [A.18.02] [01]  $A = \int_{-2}^4 f(x) dx = 36$   
 [02]  $A = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^3 -f(x) dx = 2 \cdot 20,25 = 40,5$   
 [03]  $A = \int_{-5}^0 -f(x) dx + \int_0^5 -f(x) dx \approx 2 \cdot 41,67 = 83,34$   
 [04]  $A = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \approx 1,333 + 0,167 = 1,5$   
 [05]  $A = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^3 -g(x) dx \approx 2,667 + 2,667 = 5,33$   
 [06]  $A = \int_{-3a}^0 h_a(x) dx = \frac{27}{4} a^2$
- [A.18.03] [01]  $A = \int_{-4}^1 f(x) - g(x) dx \approx 20,83$   
 [02]  $A = \int_0^6 f(x) - g(x) dx = 108$   
 [03]  $A = \int_{-1}^0 f(x) - g(x) dx + \int_0^1 g(x) - f(x) dx \approx 0,25 + 0,25 = 0,5$   
 [04]  $A = 2 \cdot \int_1^2 f(x) - g(x) dx = \frac{4}{3}$   
 [05]  $A = \int_{-3}^1 f(x) - g(x) dx = \frac{64}{3}$   
 [06]  $A = \int_0^{t^2} f(x) - g(x) dx = 0,5t^6$
- [A.18.04] [01]  $A = \int_0^1 g(x) - f(x) dx = 1,25$   
 [02]  $A = \int_{-\frac{1}{35}}^1 f(x) dx + \int_1^7 g(x) dx \approx 11,66 + 18 = 29,66$   
 [03] Tangente in  $P(-1|4)$ :  $y_{\text{Tan}} = 3x + 7$   
 $A = \int_{-2,33}^{-1,71} y_{\text{Tan}} dx + \int_{-1,71}^{-1} y_{\text{Tan}} - g(x) dx \approx 0,58 + 0,42 = 1$   
 [04]  $A = \int_0^4 f(x) - g(x) dx + \int_4^6 f(x) - h(x) dx = 32 + \frac{40}{3} = \frac{136}{3}$   
 [05] Tangente in  $P(4|2)$ :  $y_{\text{Tan}} = 0,25x + 1$   
 $A = \int_{-4}^4 y_{\text{Tan}} dx - \int_0^4 f(x) dx = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$   
 [06]  $A = 2 \cdot \int_0^2 f(x) - h(x) dx = \dots = 20,8$

- [A.18.05] [01] 1 [02]  $\infty$  [03]  $\infty$  [04] 24 [05]  $\infty$  [06] 24
- [A.18.06] [01]  $V \approx 107,23$  [02]  $V \approx 643,40$  [03]  $V = 32,4\pi \approx 101,79$   
 [04]  $V \approx 8,38$  [05]  $V \approx 53,62$  [06]  $V = 36\pi \approx 113,1$
- [A.18.07] [01]  $\emptyset = 6,75$  [02]  $\emptyset \approx 3,67$  [03]  $\emptyset = 6$
- [A.18.08] [01]  $A = 16$  [02]  $A = 9$  [03]  $A = 2$  [04]  $A = 1,25$
- [A.18.09] [01]  $A = \int_{-4}^1 x+4 dx + \int_1^6 -x^2+6x dx \approx 12,5+33,33 = 45,83$   
 [02]  $A = \int_0^2 x^3 dx + \int_2^6 (3-0,5x)^3 dx = 4+8 = 12$   
 [03]  $A = \int_{-2}^0 x^2+4 dx + \int_0^2 -x^2+4 dx = \frac{32}{3} + \frac{16}{3} = 16$
- [A.18.10] [01]  $J_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{4}{3}$   
 [02]  $x=0$   
 [03] Eine Nullstelle bei  $N(6|0)$ . Keine weitere, da  $J(x)$  monoton steigend.  
 [04] Es muss gelten:  $J_2'(x) > 0 \Rightarrow x^2+3 > 0 \leftarrow$  wahre Aussage!  
 [05]  $J_1(4) = \int_1^4 4x-3x^2 dx = -33$   
 [06]  $\int_0^x t^2-2dt = x \Rightarrow \dots \Rightarrow S_1(0|0) S_2(-3|-3) S_3(3|3)$
- [A.19.01] [01]  $f'(x) = x^3 - 4x$ ,  $f''(x) = 3x^2 - 4$ ,  $f'''(x) = 6x$   
 [02] Achsensymmetrie zur y-Achse  
 [03]  $N_{1,2}(2|0)$ ,  $N_{3,4}(-2|0)$   
 [04]  $H(0|4)$ ,  $T_{1,2}(\pm 2|0)$   
 [05]  $W_{1,2}(\pm \sqrt{\frac{4}{3}} | \frac{16}{9}) \approx W_{1,2}(\pm 1,155 | 1,778)$
- [A.19.02] [01]  $g'(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$ ,  $g''(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x$ ,  $g'''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2$   
 [02] Punktsymmetrie zum Ursprung  
 [03]  $N_{1,2,3}(0|0)$ ,  $N_{4,5}(\pm 5,16|0)$   
 [04]  $H(4|8,53)$ ,  $T(-4|-8,53)$   
 [05]  $W_1(0|0)$ ,  $W_{2,3}(\pm 2,83|\pm 5,29)$   
 [07]  $m_1=0$ ,  $m_{2,3}=4$   
 [08]  $A=35,5$
- [A.19.03] [01]  $h'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$ ,  $h''(x) = \frac{1}{2}x + 2$ ,  $h'''(x) = \frac{1}{2}$   
 [02] keine Symmetrie erkennbar  
 [03]  $N_1(0|0)$ ,  $N_{2,3}(-6|0)$   
 [04]  $H(-6|0)$ ,  $T(-2|-2,6)$
- [A.19.04] [01]  $g_t'(x) = 3x^2 + 6tx$ ,  $g_t''(x) = 6x + 6t$ ,  $g_t'''(x) = 6$   
 [02] keine Symmetrie erkennbar  
 [03]  $N_{1,2}(0|0)$ ,  $N_3(-3t|0)$   
 [04]  $H(-2t|4t^3)$ ,  $T(0|0)$   
 [05]  $W(-t|2t^3)$
- [A.19.05] [01]  $h_t'(x) = \frac{t}{3} \cdot (4-x)^2 \cdot (4-4x)$ ,  $h_t''(x) = t(4-x)(-8+4x)$ ,  $h_t'''(x) = -8tx + 24t$   
 [02] keine Symmetrie erkennbar  
 [03]  $N_1(0|0)$ ,  $N_{2,3,4}(4|0)$   
 [04]  $H(1|9t)$   
 [05]  $W_1(4|0)$ ,  $W_2(2|\frac{16}{3}t)$



**Damit die Mathe-Seite.de kostenlos bleiben kann, braucht sie deine Hilfe!**

**[facebook.com/matheseite](https://facebook.com/matheseite)**

**Bitte empfiehl  
die Mathe-Seite  
deinen Freunden.**



**h[x] =**  
MatheSeite