

A.15 Tangenten und Normalen



Es gibt mehrere Methoden Tangenten und Normale zu berechnen. Ich werde hier zwei Methoden vorstellen, mit denen das geht.

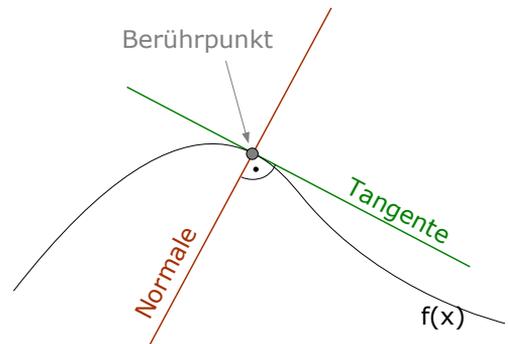
- Die gängigste ist die Methode ist die über $y=mx+b$
- Die geschickteste ist die, über die Tangenten- bzw. Normalenformel
- Es gibt noch eine dritte Methode, welche über die Punkt-Steigungs-Formel geht, diese ähnelt aber dem Weg über Tangenten- und Normalengleichung. Ich stelle diese Methode daher *nicht* vor.

Mit der ersten Methode kann man *fast* alle Tangentenaufgaben lösen.
Mit der zweiten Methode kriegt man *alle* Fragestellungen zu Tangenten hin.

Was ist überhaupt eine Tangente oder eine Normale?

Eine **Tangente** ist eine Gerade, die eine Funktion in einem bestimmten Punkt [dem Berührungspunkt] berührt.

Eine **Normale** ist eine Gerade, die in einem bestimmten Punkt [dem Berührungspunkt der Tangente] senkrecht auf der Tangente steht.



Das Wichtigste bei der Berechnung von Tangenten ist, zu wissen, dass man die Tangentensteigung über die erste Ableitung berechnet.

Es gilt: $m_{\text{Tan}} = f'(u)$

Hierbei ist „u“ der x-Wert des Berührungspunktes.

Aus der Tangentensteigung kann man die Normalensteigung berechnen [falls man die braucht].

Die Normalensteigung ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung. Es gilt: $m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{Tan}}}$

Die Tangentensteigung:

$$m_{\text{Tan}} = f'(u)$$

Die Normalensteigung:

$$m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{Tan}}}$$

„u“ ist der x-Wert des Berührungspunktes

A.15.01 Methode 1: Berechnung über $y = m \cdot x + b$ (###)**Bsp.1**Sei $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an $f(x)$ im Punkt $B(-1|f(-1))$!

Lösung:

Erstmal rechnen wir B vollständig aus.

$$f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -1 + 5 - 6 = -2 \quad \Rightarrow \quad B(-1 \mid -2)$$

Dann brauchen wir „m“, das geht über die Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 6$$

$$\Rightarrow m_{\text{Tan}} = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 6 = -1$$

Wir kennen also x , y und m [$x=-1$, $y=-2$, $m=-1$] und können alles in $y=m \cdot x+b$ einsetzen:

$$y_{\text{Tan}} = m \cdot x + b$$

$$\Rightarrow -2 = -1 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad -2 = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = -1 \cdot x - 3$$

Um die Normalengleichung zu erhalten, berechnen wir zuerst die Normalensteigung und setzen dann wieder m und die Koordinaten von B in $y = m \cdot x + b$ ein.

$$m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{Tan}}} = -\frac{1}{-1} = +1$$

$$y_{\text{Nor}} = m \cdot x + b$$

$$-2 = +1 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Nor}} = 1 \cdot x - 1$$

Bsp.2Sei $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$ Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an $f(x)$ im Punkt $B(4|a)$!

Lösung:

Wir berechnen zuerst die Koordinaten von B.

$$a=f(2) = 0,5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad B(4 \mid 3)$$

Nun brauchen wir „m“, das geht über die Ableitung:

$$f'(x) = 1x - 2$$

$$\Rightarrow m_{\text{Tan}} = f'(4) = 1 \cdot 4 - 2 = 2$$

Wir kennen x , y und m [$x=4$, $y=3$, $m=2$] und können alles in $y=m \cdot x+b$ einsetzen:

$$y_{\text{Tan}} = m \cdot x + b$$

$$\Rightarrow 3 = 2 \cdot 4 + b \Rightarrow 3 = 8 + b \Rightarrow b = -5 \Rightarrow y_{\text{Tan}} = 2x - 5$$

Um die Normalengleichung zu erhalten, berechnen wir wieder zuerst die Normalensteigung und setzen dann alles in $y = m \cdot x + b$ ein.

$$m_{\text{Nor}} = m_{\text{Nor}} = \frac{1}{m_{\text{tan}}} = \frac{1}{2} = -0,5$$

$$y_{\text{Nor}} = m \cdot x + b = +1 \cdot x + b$$

$$3 = -0,5 \cdot 4 + b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow y_{\text{Nor}} = -0,5x + 5$$

A.15.02 Methode 2: Über Tangenten- und Normalengleichung (###)

Bsp.3

Sei $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ [gleiche Aufgabe wie Bsp.1]

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an $f(x)$ im Punkt $B(-1 | f(-1))$!

Lösung:

Das Schöne an der Tangentenformel bzw. an der Normalenformel ist, dass man eigentlich nichts denken muss. Man berechnet $f'(u)$ und $f(u)$ und setzt einfach alles ein.

Zuerst berechnen wir noch die Ableitung.

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 6$$

$$u = -1$$

$$f(u) = f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = \dots = -2$$

$$f'(u) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 6 = -1$$

Nun setzen wir alles in die Formeln ein und sind fertig.

Berechnung der Tangente:

$$y_{\text{Tan}} = f'(u) \cdot (x - u) + f(u) = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1) =$$

$$= -1 \cdot (x + 1) + (-2) = -1x - 1 - 2 = -1x - 3 \Rightarrow y_{\text{Tan}} = -1 \cdot x - 3$$

Berechnung der Normale:

$$y_{\text{Nor}} = \frac{-1}{f'(-1)} \cdot (x - u) + f(u) = \frac{-1}{f'(-1)} \cdot (x + 1) + f(-1) =$$

$$= \frac{-1}{-1} \cdot (x + 1) + (-2) = 1 \cdot (x + 1) - 2 = 1 \cdot x + 1 - 2 \Rightarrow y_{\text{Nor}} = 1x - 1$$

Die Tangentenformel:
 $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Die Normalenformel:
 $y_{\text{Nor}} = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

B(u | f(u))
 ist der Berührungspunkt

Bsp.4

Sei $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$ [gleiche Aufgabe wie Bsp.2]

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an $f(x)$ im Punkt $B(4|a)$!

Lösung:

Zuerst beginnen mit der Berechnung der Ableitung.

$$f'(x) = 1 \cdot x - 2$$

$$u = 4$$

$$f(u) = f(4) = 0,5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$$

$$f'(u) = f'(4) = 1 \cdot 4 - 2 = 2$$

Nun setzen wir alles in die Formeln ein und sind fertig.

Berechnung der Tangente:

$$\begin{aligned} y_{\text{Tan}} &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) = f'(4) \cdot (x-4) + f(4) = \\ &= 2 \cdot (x-4) + 3 = 2x - 8 + 3 = 2 \cdot x - 5 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = 2x - 5 \end{aligned}$$

Berechnung der Normale:

$$\begin{aligned} y_{\text{Nor}} &= \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u) = \frac{-1}{f'(4)} \cdot (x-4) + f(4) = \\ &= \frac{-1}{2} \cdot (x-4) + 3 = -0,5 \cdot (x-4) + 3 = -0,5 \cdot x + 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Nor}} = -0,5x + 5 \end{aligned}$$

A.15.03 Wendetangente und Wendenormale (###)

Eine Wendetangente bzw. eine Wendenormale ist nicht anderes, als eine Tangente bzw. eine Normale im Wendepunkt.

Der einzige Unterschied zu „normalen“ Tangentenaufgaben ist der, dass man zuerst den Wendepunkt berechnen muss.

Bsp.5

Bestimme die Gleichung der Wendetangenten

und der Wendenormale der Funktion $f_t(x)$ mit:

$$f_t(x) = \frac{1}{3t}x^3 + 2x^2 + 3tx$$

Lösung:

Da es sich um *Wendetangente* und *Wendenormale* handelt, wird der Berührungspunkt logischerweise auch der Wendepunkt sein. Daher berechnen wir erst `mal den Wendepunkt.

$$\text{Ableitungen:} \quad f'(x) = \frac{1}{t}x^2 + 4x + 3t \quad f''(x) = \frac{2}{t}x + 4 \quad f'''(x) = \frac{2}{t}$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{2}{t}x + 4 = 0$$

| · t

$$2x + 4t = 0$$

$$\Rightarrow x_w = -2t$$

Überprüfung in $f'''(x)$:

$$f'''(x) = \frac{2}{t} \neq 0 \Rightarrow \text{bei } x_w = -2t \text{ ist sicher ein Wendepunkt.}$$

y-Wert:

$$y_w = \frac{2}{t}x + 4 = \dots = -\frac{2}{3}t^2$$

Damit haben wir den Wendepunkt. Toll.

$$W\left(-2t \mid -\frac{2}{3}t^2\right)$$

Die Steigung im Wendepunkt ist:

$$f'(-2t) = \frac{1}{t}(-2t)^2 + 4(-2t) + 3t = \frac{1}{t} \cdot 4t^2 - 8t + 3t = -t$$

Jetzt können wir die Wendetangente aufstellen:

➤ erste Möglichkeit, über $y = m \cdot x + b$:

$$y = m \cdot x + b$$

die Werte für x, y und m einsetzen

$$-\frac{2}{3}t^2 = -t \cdot (-2t) + b \Rightarrow -\frac{2}{3}t^2 = 2t^2 + b \Rightarrow -\frac{8}{3}t^2 = b \Rightarrow y_{\text{Tan}} = -tx - \frac{8}{3}t^2$$

➤ zweite Möglichkeit, über Tangentengleichung:

$$y_{\text{Tan}} = f'(-2t) \cdot (x - (-2t)) + f(-2) = -t \cdot (x + 2t) - \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow y_{\text{Tan}} = -tx - \frac{8}{3}t^2$$

Ebenso können wir die Wendenormale aufstellen:

➤ erste Möglichkeit, über $y = m \cdot x + b$:

$$\text{Zuerst brauchen wir die Normalensteigung: } m_{\text{Nor}} = \frac{-1}{m_{\text{tan}}} = \frac{-1}{-t} = \frac{1}{t}$$

$$y = m \cdot x + b$$

die Werte für x, y und m einsetzen

$$-\frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{t} \cdot (-2t) + b \Rightarrow -\frac{2}{3}t^2 = -2 + b \Rightarrow -\frac{2}{3}t^2 + 2 = b \Rightarrow y_{\text{Tan}} = \frac{1}{t}x - \frac{2}{3}t^2 + 2$$

➤ zweite Möglichkeit, über Normalengleichung:

$$y_{\text{Tan}} = \frac{-1}{f'(-2t)} \cdot (x - (-2t)) + f(-2t) = \frac{-1}{-t} \cdot (x + 2t) - \frac{2}{3}t^2 =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot (x + 2t) - \frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{t} \cdot x + 2 - \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow y_{\text{Tan}} = \frac{1}{t}x + 2 - \frac{2}{3}t^2$$

A.15.04 Unbekannter Berührungspunkt (Tangente von außen) (§§)

Worum geht es überhaupt?

Gegeben sind eine Funktion $f(x)$ und ein Punkt A, der nicht auf der Funktion liegt.

Gesucht sind eine [oder mehrere] Tangenten, die an der Funktion anliegen und durch den gegebenen Punkt A laufen.

Vorgehensweise:

Man verwendet die Tangentengleichung und setzt die Koordinaten des gegebenen Punktes A für x und y ein. [NICHT für „ u “ einsetzen!! „ u “ ist der x -Werts des Berührungspunktes und den haben wir NICHT!]

Man erhält eine Gleichung mit „ u “ als einziger Unbekannten.

Die Gleichung löst man von Hand oder mit dem GTR nach „ u “ auf.

Bsp.6

Bestimme die Gleichung der Tangenten an die Funktion die durch den Punkt A(1 | 9) geht.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 4,$$

Lösung:

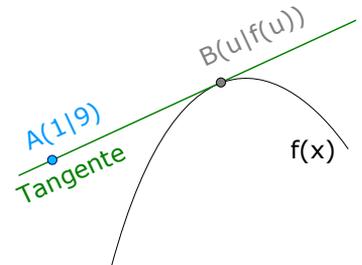
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5 \quad [\text{Ableitung ist immer gut}]$$

Der Punkt A liegt *nicht* auf der Funktion $f(x)$.

[Setzt man den x -Wert von A in $f(x)$ ein, kommt nicht 9 raus.]

Insbesondere gilt nicht $m_{\text{Tan}} = f'(1)$.

Da wir den Berührungspunkt nicht gegeben haben, schenken wir ihm großzügiger Weise die Koordinaten: B(u | $f(u)$)



Ab nun stellen wir unsere Tangentengleichung auf:

$$y_{\text{Tan}} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u) \quad \Leftrightarrow$$

$$y_{\text{Tan}} = (3u^2 - 6u + 5) \cdot (x-u) + u^3 - 3u^2 + 5u + 4$$

Jetzt erst kommt unser Punkt A ins Spiel. A liegt zwar nicht auf der Funktion, aber dafür auf der Tangente.

Also machen wir eine Punktprobe mit A.

A(1 | 9) \Rightarrow $x_A=1$, $y_A=9$ einsetzen.

$$9 = (3u^2 - 6u + 5) \cdot (1-u) + u^3 - 3u^2 + 5u + 4 \quad \leftarrow$$

[Die Gleichung vereinfachen ...]

$$9 = \cancel{3u^2 - 6u + 5} - \cancel{3u^3 + 6u^2 - 5u} + u^3 - \cancel{3u^2 + 5u} + 4$$

$$9 = -2u^3 + 6u^2 - 6u + 9 \quad | - 9$$

Die Gleichung, die man hier links erhält, löst man normalerweise natürlich mit dem Taschenrechner.

In diesem Buch möchte ich jedoch alles „von Hand“ rechnen. ☺

$$0 = -2u^3 + 6u^2 - 6u \quad \text{„u“ ausklammern}$$

$$0 = u \cdot (-2u^2 + 6u^2 - 6u)$$

$$u_1 = 0$$

$$-2u^2 + 6u - 6 = 0$$

[Diese Gleichung löst man mit der p-q-Formel oder mit der a-b-c-Formel. Ich spare mir das an dieser Stelle. Man erhält auf jeden Fall keine Lösung, da unter der Wurzel 'was Negatives stehen wird.]

Einzigste Lösung ist also $u = 0$

Nun haben wir den Berührungspunkt: $B(0 | f(0))$.

Wir können also die Tangentengleichung aufstellen.

$$\begin{aligned} y_{\text{Tan}} &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) \\ \Rightarrow y_{\text{Tan}} &= f'(0) \cdot (x-0) + f(0) = 5 \cdot (x-0) + 4 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = 5x + 8 \end{aligned}$$

A.15.05 kurze Beispielaufgabe

Bsp.7

Bestimme die Gleichung der Tangenten an $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, die parallel zu $y = 9x + 16$ sind !

Lösung:

Wenn die Tangenten parallel zu $y = 9x + 16$ sind, müssen auch sie die Steigung $m_{\text{Tan}} = 9$ haben.

$$\Rightarrow 9 = m_{\text{Tan}} = f'(u)$$

$$9 = 3u^2 - 6u \quad | -9 \quad | :3$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2 \quad \leftarrow \text{ a-b-c-Formel geht selbstverständlich ebenfalls}$$

$$u_1 = -1 \quad u_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad B_1(-1 | f(-1)) \quad B_2(3 | f(3))$$

Jetzt können wir bereits die Tangentengleichungen berechnen:

[Ich kürze den Rest der Rechnung etwas ab. Ich verwende auch nur die Methode über die Tangentengleichung. Über $y = m \cdot x + b$ geht's natürlich genau so gut]

$$\text{erste Tangente: } y_{\text{Tan}} = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1) = 9 \cdot (x + 1) + 0 = 9x + 9$$

$$\text{zweite Tangente: } y_{\text{Tan}} = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3) = 9 \cdot (x - 3) + 4 = 9x - 25$$