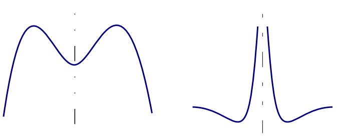
A.17 Symmetrie von Funktionen

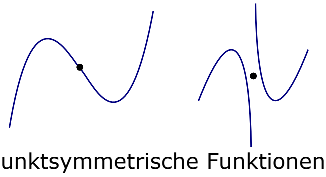
Es gibt zwei Arten von Symmetrie: Punktsymmetrie und Achsensymmetrie.

Eine Funktion ist punktsymmetrisch, wenn es einen irgendeinen Punkt gibt, an dem man die Funktion derart spiegeln kann, dass als Spiegelbild wieder die gleiche Funktion \`rauskommt.

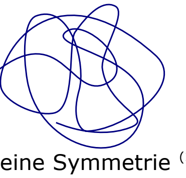
Eine Funktion ist achsensymmetrisch, wenn es eine Gerade [also eine Achse] gibt, an der man die Funktion derart spiegeln kann, dass als Spiegelbild wieder die gleiche Funktion \`rauskommt.



achsensymmetrische Funktionen



punktsymmetrische Funktionen



keine Symmetrie [1]

Normalerweise interessiert man sich bei Symmetrie nur für *Punktsymmetrie zum Ursprung* und für *Achsensymmetrie zur y-Achse*.

Um die Symmetrie einer Funktion nachzuweisen gibt es zwei Formeln:

$f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

1 Titel dieses Kunstwerkes: „Die Klarheit der Gedanken“.
Die Rechte für das Kunstwerk können für einen hohen sechsstelligen Betrag erworben werden.

A.17.01 Symmetrieregeln für Weicheier (∰)

Bei **ganzrationalen Funktionen** schaut man nur auf die Hochzahlen von „x“.

Gibt es nur **gerade Hochzahlen**, ist f(x) symmetrisch zur y-Achse.
Bsp: $f(x) = 2x^6 - 2{,}5x^4 - 5$ [1] $g(x) = 0{,}3x^{-2} - 3tx^2 + 6t^2x^4$

Gibt es nur **ungerade Hochzahlen**, ist f(x) symmetrisch zum Ursprung.
Bsp: $h_t(x) = 2x^5 + 12x^3 - 2x$ $i(x) = 2x^{-1} + \pi x^{-3} - 3\pi^2 x^{-5} + x^3 - 4x$

Gibt es gemischte Hochzahlen, ist f(x) nicht symmetrisch.
Bsp: $j(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ $k(x) = 2x \cdot (x^3 + 6x^2 + 9x)$ [2]

A.17.02 Symmetrie zum Ursprung und zur y-Achse (∯)

Um die Symmetrie einer Funktion nachzuweisen, gibt es zwei Formeln:

$f(-x) = f(x)$ ⇒ **Achsensymmetrie zur y-Achse**
$f(-x) = -f(x)$ ⇒ **Punktsymmetrie zum Ursprung**

Man wendet die Formel folgendermaßen an:
Man setzt in die Funktion, die man überprüfen will, statt dem „x“ ein „(-x)“ ein (man berechnet also f(-x)). Danach vereinfacht man die Funktion.
Wenn nun wieder die Funktion f(x) rauskommt, hat man eine Achsensymmetrie zur y-Achse und ist natürlich fertig.
Sollte nicht wieder f(x) rauskommen, kann man noch ein Minus ausklammern, um zu schauen, ob man vielleicht -f(x) erhält. Wenn auch das nicht der Fall ist, ist f(x) weder zum Ursprung noch zur y-Achse symmetrisch und man geht frustriert heim.

Bsp.1

Beispiel einer Symmetrie zur y-Achse!

$f_t(x) = 2x^6 - 2{,}5x^4 - 5$

$f(-x) = 2(-x)^6 - 2{,}5(-x)^4 - 5 = 2x^6 - 2{,}5x^4 - 5 = f(x)$

⇒ Achsensymmetrie zur y-Achse

1 Zahlen, die mit keinem „x“ verbunden sind, gelten als gerade Hochzahlen (denn $5 = 5 \cdot x^0$)
2 Zuerst ausmultiplizieren

Bsp.2

Beispiel einer Symmetrie zum Ursprung

$f(x) \;= 2x^5+12x^3-2x$

$f(-x) \;= 2\cdot(-x)^5+12\cdot(-x)^3-2\cdot(-x) =$
$\quad = 2\cdot(-x^5)+12\cdot(-x^3)+2\cdot x =$
$\quad = -2x^5-12x^3+2x =$ ←

[Es ist *keine* Achsensymmetrie, da nicht f(x) rausgekommen ist. Wir klammern ein Minus aus, um zu prüfen, ob´s vielleicht punktsymmetrisch ist.]

$\quad = -(2x^5+12x^3-2x) =$
$\quad = - \;\; (\;\; f(x) \;\;)$

⇒ Punktsymmetrie zum Ursprung

Bsp.3

Beispiel einer Funktion ohne Symmetrie.

$f(x) \;= x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

$f(-x) \;= (-x)^3+2(-x)^2-3(-x)+ 4 =$
$\quad = -x^3 + 2\cdot x^2 + 3x + 4 =$
$\quad$ [≠f(x), also „-" ausklammern]
$\quad = -(x^3 - 2x^2 - 3x - 4)$

In der Klammer steht wieder nicht genau f(x).
Die Funktion ist also weder zum Ursprung,
noch zur y-Achse symmetrisch.

Bsp.4

Beispiel einer Symmetrie zur y-Achse!

$f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+2}$

$f(-x) = \frac{(-x)^2-3}{2(-x)^2+2} = \frac{x^2-3}{2x^2+2} = f(x)$

⇒ Achsensymmetrie zur y-Achse

Bsp.5

Beispiel einer Symmetrie zum Ursprung

$f(x) \;=\; \frac{1}{2t}x\cdot\left(x^2-t\right)^2$

$f(-x) = \frac{1}{2t}\cdot(-x)\cdot\left((-x)^2-t\right)^2 = -\frac{1}{2t}x\cdot\left(x^2-t\right)^2 = -\, f(x)$

⇒ Punktsymmetrie zum Ursprung

A.17.03 Symmetrie zu Punkten und Achsen über Formeln (∮)

Ist eine Funktion symmetrisch zu irgendeinem Punkt mit den Koordinaten S(a|b), so gilt die Formel:

$$f(a-x)+f(a+x) = 2\cdot b$$

Ist eine Funktion symmetrisch zu irgendeiner senkrechten Gerade mit der Gleichung x=a, so gilt:

$$f(a-x) = f(a+x)$$

[Man setzt a,b und die Funktion f(x) in die Formel ein, löst alle Klammern etc.. auf und erhält zum Schluss eine wahre Aussage. Die Rechnungen sind oft aufwändig.]

Punktsymmetrie
zum Punkt ***S(a|b)***
$$f(a-x)+f(a+x)=2b$$

Achsensymmetrie
zur Gerade ***x=a***
$$f(a-x) = f(a+x)$$

Bsp.6

$f(x) = 2x^2-8x+5$

Zeigen Sie, dass f(x) zu x=2 achsensymmetrisch ist.

Lösung:

Die Symmetrieachse ist x=2, also gilt die Formel:

$$f(2-x) = f(2+x)$$

$$2\cdot(2-x)^2-8\cdot(2-x)\cancel{+5} = 2\cdot(2+x)^2-8\cdot(2+x)\cancel{+5} \qquad |\ -5$$

$$2\cdot(4-4x+x^2)\cancel{-16}+8x = 2\cdot(4+4x+x^2)\cancel{-16}-8x \qquad |\ +16$$

$$8-8x+2x^2 + 8x = 8+8x+2x^2 - 8x \qquad |\ \text{zusammenfassen}$$

$$8+2x^2 = 8+2x^2$$

wahre Aussage ⇒ bewiesen.

f(2–x):
Man nimmt sich die Funktion f(x) zur Brust und ersetzt jeden Buchstaben „x" durch die Klammer „(2–x)". Also:
$f(2-x) = 2\cdot(2-x)^2 - 8\cdot(2-x) +5 =$
$= 2\cdot(4-4x+x^2) - 16+8x + 5 = \ldots$

f(2+x):
Nimmst du wider dem funkzion f(x). Haust du jedem Kack-„x" weg und schreibst du davür immer „(2+x)". Checkst du krass ab Alder.
$f(2+x) = 2\cdot(2+x)^2 - 8\cdot(2+x) +5 =$
$= 2\cdot(4+4x+x^2) - 16-8x + 5 = \ldots$

Bsp.7

Zeigen Sie: $f(x)=x^3+6x^2+9x+5$ ist punktsymmetrisch!

Lösung:

Dummerweise ist der Symmetriepunkt nicht gegeben.
[In den allermeisten Aufgaben ist er jedoch gegeben.]

Der Symmetriepunkt einer Funktion dritten Grades kann nur der Wendepunkt sein.

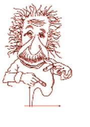
Wendepunkt berechnen: [Kürzen wir hier stark ab!]

$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+12=0 \Rightarrow x=-2$

y-Wert: $f(-2)=\ldots=3 \qquad \Rightarrow \qquad W(-2|3)$

Symmetriepunkte einer Funktion sind immer besondere Punkte [Wendepunkte, Schnittpunkte von Asymptoten, ...]

Symmetrieachsen einer Funktion sind immer besondere senkrechte Geraden [senkrechte Geraden durch Extrema, senkrechte Asymptoten, ...]



Der Symmetriepunkt von f(x) ist also: W(-2|3)

Wir wenden die Formel für Punktsymmetrie an:

$$f(-2-x) + f(-2+x) = 2\cdot 3$$

Nebenrechnung:

$f(-2-x) = (-2-x)^3+6\cdot(-2-x)^2+9\cdot(-2-x)+5 = (-2-x)^2\cdot(-2-x) + 6\cdot(4+4x+x^2) - 18-9x +5 =$
$= (4+4x+x^2)\cdot(-2-x) + 24+24x+6x^2 - 18-9x +5 =$
$= -8-4x-8x-4x^2-2x^2-x^3 + 24+24x+6x^2 - 18-9x +5 = \ldots = -x^3+3x+3$

$f(-2+x) = (-2+x)^3+6\cdot(-2+x)^2+9\cdot(-2+x)+5 = (-2+x)^2\cdot(-2+x) + 6\cdot(4-4x+x^2) - 18+9x +5 =$
$= (4-4x+x^2)\cdot(-2+x) + 24-24x+6x^2 - 18+9x +5 =$
$= -8+4x+8x-4x^2-2x^2+x^3 + 24-24x+6x^2 - 18+9x +5 = \ldots = x^3-3x+3$

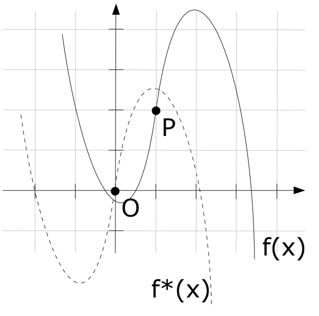
$$-x^3+3x+3 \;+\; x^3-3x+3 = 6$$
$$6 = 6$$

Wahre Aussage ⇒ Punktsymmetrie ist bewiesen.

A.17.04 Symmetrie zu Punkten und Achsen über Verschieben (∮)

Wenn eine Funktion symmetrisch zu irgend einem Punkt ist, verschiebt man die Funktion so weit nach links/rechts und oben/unten, bis der Symmetriepunkt im Ursprung liegt. Nun kann man für die neue, verschobene Funktion Symmetrie zum Ursprung nachweisen [einfach über f(-x)=-f(x)].
Wenn eine Funktion symmetrisch zu irgend einer Achse ist, verschiebt man die Funktion so weit nach links/rechts, bis die Symmetrieachse auf der y-Achse liegt. Nun kann man für die neue Funktion Symmetrie zur y-Achse nachweisen [einfach über f(-x)=f(x)].

Nehmen wir mal an, eine Funktion f(x) soll symmetrisch zum Punkt P(1|2) sein. Wenn man diese Funktion um 1 nach links verschiebt und dann um 2 nach unten, müsste die neue, verschobene Funktion [ich habe sie f*(x) genannt und gestrichelt dargestellt] symmetrisch zum Ursprung sein. [Diese Symmetrie zum Ursprung könnte man dann über f(-x)=-f(x) beweisen].



Bsp.8 $f(x) = x^3-6x^2+9x-5$
Zeigen Sie: f(x) ist zum Punkt S(2|-3) symmetrisch!

Lösung:
Wir zeigen das so: Zuerst verschieben wir f(x) um 2 nach links, dann um 3 nach oben.
Jetzt müsste der Symmetriepunkt im Ursprung liegen.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x+2) + 3 = \\ &= (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 9(x+2) - 5 + 3 = \dots = \\ &=(x^3+6x^2+12x+8)-6\cdot(x^2+4x+4)+9x+18-5+3 = \\ &= x^3+6x^2+12x+8-6x^2-24x-24+9x+18-5+3 = \\ &= x^3 - 3x \end{aligned}$$

Man verschiebt eine Funktion um 2 nach links, indem man jedes „x" der Funktion f(x) durch „(x+2)" ersetzt.

Man verschiebt eine Funktion um 3 nach oben, indem man hinter die Funktion noch ein „+3" dran hängt.

zu „Verschieben" siehe →Kap.A.23.01

Die erhaltene Funktion $f^*(x)=x^3-3x$ ist symmetrisch zum Ursprung, da sie nur ungerade Hochzahlen enthält. [Den Beweis über f(-x)=-f(x) brauchen wir gar nicht!]
Die Ausgangsfunktion ist f(x) symmetrisch zu S(2|-3)!

Bsp.9 $f_t(x) = 0{,}6t\cdot(6x+x^2)$

Zeigen Sie, dass $f_t(x)$ zur Geraden x=-3 symmetrisch ist!

Lösung:

Wenn f(x) symmetrisch zu x=-3 ist, können wir f(x) um 3 nach rechts verschieben, dann ist die verschobene Funktion f*(x) symmetrisch zu x=0 [y-Achse].

$$f^*(x) = f(x-3) = 0{,}6t\cdot[\ 6(x-3) + (x-3)^2\ ] =$$
$$= 0{,}6t\cdot[\ 6x-18 + x^2-6x+9\ ] = 0{,}6t\cdot[\ x^2-9\ ]$$

Man verschiebt eine Funktion um 3 nach rechts, indem man jedes „x" der Funktion f(x) durch „(x–3)" ersetzt.

zu „Verschieben" siehe →Kap.A.23.01

Die neue, verschobene Funktion hat nur gerade Hochzahlen in x. Sie ist also symmetrisch zur y-Achse. Spaßeshalber können wir noch den richtigen Beweis durchführen:

$$f^*(-x) = f^*(x)$$
$$0{,}6t\cdot[(-x)^2-9] = 0{,}6t\cdot[x^2-9]$$
$$0{,}6t\cdot[x^2-9] = 0{,}6t\cdot[x^2-9]$$

wahre Aussage ⇒ Symmetrie ist bewiesen.

Bsp.10

Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{2x^2+5x}{x+3}$ zum Punkt A(-3|-7) punktsymmetrisch ist!

Lösung:

Der Symmetriepunkt liegt bei (-3|-7).

Also verschieben wir f(x) um 3 nach rechts und 7 hoch.

$$f^*(x) = f(x-3) + 7 = \frac{2(x-3)^2+5(x-3)}{(x-3)+3}+7 =$$
$$= \frac{2\cdot(x^2-6x+9)+5x-15}{x-3+3}+7 = \frac{2x^2-12x+18+5x-15}{x}+7 =$$
$$= \frac{2x^2-7x+3}{x}+\frac{7}{1} = \frac{2x^2-7x+3}{x}+\frac{7x}{1x} = \frac{2x^2-7x+3+7x}{x} = \frac{2x^2+3}{x}$$

Um ein vernünftiges Ergebnis zu erhalten, sollte man den Bruch und die „7" zusammenrechnen. Dafür schreibt man die „7" als „$^7/_1$" erweitert mit „x". Jetzt hat man unten „x" als Hauptnenner und kann beide Brüche addieren.

Nun sollten wir zeigen, dass f*(x) punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$$f^*(-x) = -f^*(x)$$
$$\frac{2(-x)^2+3}{(-x)} = -\frac{2x^2+3}{x}$$
$$\frac{2x^2+3}{-x} = -\frac{2x^2+3}{x}$$

Ein Minuszeichen kann von unten [oder von oben] aus dem Bruch einfach vor den Bruch ziehen. [Und umgekehrt.]

Wahre Aussage. Die verschobene Funktion f*(x) ist symmetrisch zum Ursprung, also ist f(x) symmetrisch zu S(2|-3)!

A.17.05 Symmetrie von Ableitungen (∮)

Wenn eine Funktion symmetrisch ist, zeigt sowohl ihre Ableitung, als auch ihre Stammfunktion ebenfalls Symmetrieeigenschaften auf.

Symmetrie von Ableitungen:
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zum Ursprung,
dann ist ihre Ableitung f'(x) symmetrisch zur y-Achse.
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zur y-Achse,
dann ist ihre Ableitung f'(x) symmetrisch zum Ursprung.

Symmetrie von Stammfunktionen
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zum Ursprung,
dann ist ihre Stammfunktion F(x) symmetrisch zur y-Achse.
Ist eine Funktion f(x) symmetrisch zur y-Achse,
dann ist ihre Ableitung F(x) symmetrisch zu irgendeinem Punkt der y-Achse.
[also nicht unbedingt zum Ursprung!]

Bsp.11
Sei $f(x) = 6x^3+14x$

f(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da nur ungerade Hochzahlen vorkommen. In der Ableitung $f'(x) = 18x^2+12$ kommen nur gerade Hochzahlen vor, f'(x) ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.
In der Stammfunktion $F(x) = 2x^4 + 7x^2$ kommen ebenfalls nur gerade Hochzahlen vor, die Stammfunktion ist also auch achsensymmetrisch...

A.17.06 Interpretation eines deutschen Volksliedes (∯)

Hänschen klein
ging allein

in die weite
Welt hinein.

Stock und Hut
steht Ihm gut.

Ein junger Mann von zwerghaftem Körperwuchs, mit völlig behämmertem Rufnamen [wenn´s wenigstens „Hans" wäre, aber „Hänschen" ... naja..] Aufgrund dieser genannten Eigenschaften ist er wohl auch ganz allein und hat keine Freunde. Er hält es daheim nicht mehr aus und beschließt abzuhauen. Da er weder im Besitz eines Fernsehers ist, noch Internetanschluss, hat erscheint ihm die Welt groß, weit und unübersichtlich. Eine weiterer Grund dafür, dass er keine Freunde hat, ist sein eher „ungewöhnlicher" Kleidungsgeschmack.
„Hut steht ihm gut.." Bei solchem Kleidungsstil ist es nicht verwunderlich, dass er keine Freunde hat. „Stock steht ihm gut.." Es könnte sich hierbei um einen Baseballschläger handeln [wäre wenigstens cool], allerdings glaube ich dieses aufgrund der restlichen Charaktereigenschaften von „Hänschen" ausschließen zu können. Die glaubwürdigste Bedeutung von „Stock *steht* ihm gut" sehe ich in sexueller Natur.
Wir fassen das Gedicht nochmal zusammen:
„Ein kleiner, geistig minderbemittelter junger Mann, ohne Allgemeinbildung haut sexuell hocherregt von daheim ab .."

Und das in einem deutschen Volklied!! O tempora, o mores!!