A.23 Verschieben, Strecken, Spiegeln

A.23.01 Verschieben (∰)

Funktionen kann man in x-Richtung und in y-Richtung verschieben.

Verschiebung in positive x-Richtung: **$x \to (x-a)$**
Man verschiebt eine Funktion um „a" **nach rechts**,
indem man in f(x) „x" durch „x–a" ersetzt.

Verschiebung in negative x-Richtung: **$x \to (x+a)$**
Man verschiebt eine Funktion um „a" **nach links**,
indem man in f(x) „x" durch „x+a" ersetzt.

Verschiebung in positive y-Richtung: **$f(x) \to f(x)+b$**
Man verschiebt eine Funktion um „b" **nach oben**,
indem man zu f(x) „b" dazu addiert.

Verschiebung in negative y-Richtung: **$f(x) \to f(x)-b$**
Man verschiebt eine Funktion um „b" **nach unten**,
indem man von f(x) „b" abzieht.

Bsp.1
$f(x) = 0{,}4x + \cos(2x)$ soll um „2" nach links verschoben werden!

Lösung:
Die gesuchte Funktion ist $f(x+2)$!
$f(x+2) = 0{,}4\cdot(x+2) + \cos(2\cdot[x+2]) = 0{,}4x+0{,}8 + \cos(2x+4)$

Bsp.2
$f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$ soll um 1 nach rechts und 4 nach oben verschoben werden!

Lösung:
Die gesuchte Funktion ist $f(x-1)+4$!
$f(x-1)+4 = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)-1}+4 = \frac{x^2-2x+1-4}{x-2}+\frac{4}{1} = \text{[Hauptnenner]} = \frac{x^2-2x-3}{x-2}+\frac{4x-8}{x-2} = \frac{x^2+2x-11}{x-2}$

Bsp.3
$f(x) = x^3-6x^2+12x-6$ wird um 2 nach links und 1 nach unten verschoben!

Lösung:
Die gesuchte Funktion ist $f(x+2)-1$!
$f_{neu}(x) = f(x+2)-1 = (x+2)^3-6(x+2)^2+12(x+2)-6 - 1 = \ldots =$
$= (x^3+6x^2+12x+8) - 6(x^2+4x+4) + 12(x+2) - 7 =$
$= x^3+6x^2+12x+8 - 6x^2-24x-24 + 12x+24 - 7 = x^3+1$

A.23.02 Strecken (∰)

Funktionen kann man in x-Richtung und in y-Richtung strecken.

Ist der Streckfaktor zwischen 0 und 1, nennt man den Vorgang stauchen. Das Stauchen ist mathematisch gesehen, nicht sonderlich wichtig, denn der Faktor beim Stauchen ist einfach nur der Kehrwert beim Strecken. [Will man beispielsweise um den Faktor „3" stauchen, so streckt man einfach mit dem Faktor $^1/_3$].

Ist der Streckfaktor negativ, so hat man einfach den Fall, dass die Streckung noch zusätzlich mit einer Spiegelung an der Achse verbunden ist.

Strecken in y-Richtung: $\mathbf{f(x) \to k \cdot f(x)}$

Bei einer **Streckung in y-Richtung** wird die Funktion mit dem Streckfaktor multipliziert.

Strecken in x-Richtung: $\mathbf{x \to \left(\frac{1}{k} \cdot x\right)}$

Bei einer **Streckung in x-Richtung** wird „x" mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert.

Bsp.4

Strecken Sie $f(x) = 2(x+3)^5-4x$ um den Faktor 2 in y-Richtung.

Lösung:

Bei einer Streckung in y-Richtung wird f(x) mit dem Streckfaktor multipliziert.

$\Rightarrow f_{neu}(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot [\ 2(x+3)^5-4x\ ] = 4 \cdot (x+3)^5-8x$

Bsp.5

$f(x) = 0{,}4x+\cos(2x)$ soll um den Faktor 5 in y-Richtung gestaucht werden.

Lösung:

Eine Stauchung um den Faktor 5 entspricht einer Streckung um den Faktor $\frac{1}{5}=0{,}2$.

Wir strecken also unsere Funktion um den Faktor 0,2 in y-Richtung.

$f_{neu}(x) = 0{,}2 \cdot f(x) = 0{,}2 \cdot [0{,}4x+\cos(2x)] = 0{,}08x+0{,}2 \cdot \cos(2x)$

Bsp.6

$f(x) = x^3+2x^2-e^{3x}$ soll um den Faktor 3 in x-Richtung gestreckt werden.

Lösung:

Bei einer Streckung in x-Richtung wird „x" mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert. Wir ersetzen also jedes „x" durch „$\frac{1}{3}x$".

$f_{neu}(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^3+2 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2-e^{3 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)} = \frac{1}{27}x^3+\frac{2}{9}x^2-e^x$

Bsp.7

$f(x) = x^3-6x^2+12x-6$ soll um den Faktor 2 in x-Richtung gestaucht werden.

Lösung:
Eine Stauchung um den Faktor 2 entspricht einer Streckung um den Faktor ½.
Bei einer Streckung in x-Richtung wird „x“ immer mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert. Der Kehrwert von ½ ist 2, daher ersetzen wir also jedes „x“ durch „2x“.
$f_{neu}(x) = f(2x) = (2x)^3-6(2x)^2+12(2x)-6 = 8x^3-24x^2+24x-6$

A.23.03 Spiegeln an Koordinatenachsen (∯)

Eine Funktion f(x) wird **an der x-Achse gespiegelt**,
indem vor die Funktion ein „-“ gesetzt wird. Also: $f(x) \rightarrow -f(x)$

Eine Funktion f(x) wird **an der y-Achse gespiegelt**,
indem jedes „x“ durch „-x“ ersetzt wird. Also: $f(x) \rightarrow f(-x)$

Eine Funktion f(x) wird **am Ursprung gespiegelt**,
indem man f(x) an der x-Achse und an der y-Achse spiegelt. Also: $f(x) \rightarrow -f(-x)$

Bsp.8

$f(x) = 2x^2-6$
a) Spiegeln Sie f(x) an der x-Achse!
b) Spiegeln Sie f(x) an der y-Achse!
c) Spiegeln Sie f(x) am Ursprung!

Lösung:
a) f(x) wird zu -f(x).
Die gespiegelte Funktion wird also zu $f_{neu}(x) = -(2x^2-6) = -2x^2+6$
b) f(x) wird zu f(-x). Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = 2(-x)^2-6 = 2x^2-6$
[Man erhält wieder f(x). Das ist nicht überraschend, da f(x) ja symmetrisch zur y-Achse ist.]
c) Erst spiegeln wir f(x) an der x-Achse, dann an der y-Achse. [Umgekehrt geht auch.]
An der x-Achse spiegeln: $f_x(x) = -f(x) = -(2x^2-6) = -2x^2+6$
An der y-Achse spiegeln: $f_{xy}(x) = f_x(-x) = -2(-x)^2+6 = -2x^2+6$
⇒ Wird f(x) am Ursprung gespiegelt, erhält man also die Funktion:
$f_{neu}(x) = -2x^2+6$

Bsp.9

$f(x) = x^3+2x^2-e^{2x}$

a) Spiegeln Sie f(x) an der x-Achse!
b) Spiegeln Sie f(x) an der y-Achse!
c) Spiegeln Sie f(x) am Ursprung!

Lösung:

a) f(x) wird zu -f(x).
Die gespiegelte Funktion wird also zu $f_{neu}(x) = -(x^3+2x^2-e^{2x}) = -x^3-2x^2+e^{2x}$

b) f(x) wird zu f(-x). Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = (-x)^3+2(-x)^2-e^{2(-x)} = -x^3+2x^2-e^{-2x}$

c) Erst spiegeln wir f(x) an der x-Achse, dann an der y-Achse. [Umgekehrt geht auch.]
An der x-Achse spiegeln: $f_x(x) = -f(x) = -(x^3+2x^2-e^{2x}) = -x^3-2x^2+e^{2x}$
An der y-Achse spiegeln: $f_{xy}(x) = f_x(-x) = -(-x)^3-2(-x)^2+e^{2(-x)} = +x^3-2x^2+e^{-2x}$
⇒ Wird f(x) am Ursprung gespiegelt, erhält man also die Funktion:
$f_{neu}(x) = x^3-2x^2+e^{-2x}$

A.23.04 Spiegeln über Formel (∮)

f(x) wird an einer **senkrechten Gerade x=a gespiegelt**,
indem „x" durch „2a–x" ersetzt wird. Also: $f(x) \to f(2a-x)$

f(x) wird an einer **waagerechten Gerade y=b gespiegelt**,
indem „f(x)" von 2b abgezogen wird. Also: $f(x) \to 2b-f(x)$

Eine Funktion f(x) wird an **einem Punkt S(a|b) gespiegelt**,
indem man f(x) an der x=a und y=b spiegelt. Also: $f(x) \to 2b-f(2a-x)$

Bsp.10

$f(x) = x+2x^2-e^{2x}$

a) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade x=1.
b) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade y=3.
c) Spiegeln Sie f(x) am Punkt S(1|3).

Lösung:

a) x wird zu 2·1–x=2–x. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = f(2-x) = (2-x)+2\cdot(2-x)^2-e^{2\cdot(2-x)} = (2-x)+2\cdot(4-4x+x^2)-e^{4-2x} =$
$= 2-x + 8-8x+2x^2-e^{4-2x} = 10-9x+2x^2-e^{4-2x}$

b) f(x) wird zu 2·3–f(x) = 6–f(x). Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = 6-[x+2x^2-e^{2x}] = 6-x-2x^2+e^{2x}$

c) Wir spiegeln f(x) an x=1 und an y=3. Wir bestimmen also

$$f_{neu}(x) = 2\cdot3-f(2\cdot1-x) = 6-f(2-x) = 6-[(2-x)+2\cdot(2-x)^2-e^{2\cdot(2-x)}] =$$
$$= 6-[(2-x)+2\cdot(4-4x+x^2)-e^{4-2x}] = 6 - [2-x + 8-8x+2x^2-e^{4-2x}] =$$
$$= 6 - 10+9x-2x^2+e^{4-2x} = -4+9x-2x^2+e^{4-2x}$$

Bsp.11

$f(x) = 2(x+3)^5-4x$

a) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade x=-2.
b) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade y=5.
c) Spiegeln Sie f(x) am Punkt S(-2|5).

Lösung:

a) x wird zu $2\cdot(-2)-x=-4-x$. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$$f_{neu}(x) = f(-4-x) = 2(-4-x+3)^5-4\cdot(-4-x) = 2\cdot(-1-x)^5+16+4x$$
b) f(x) wird zu $2\cdot5-f(x) = 10-f(x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$$f_{neu}(x) = 10-[2(x+3)^5-4x] = 10-2(x+3)^5+4x$$
c) Wir spiegeln f(x) an x=-2 und an y=5. Wir bestimmen also
$$f_{neu}(x) = 2\cdot5-f(2\cdot(-2)-x) = 10-f(-4-x) = 10-[2(-4-x+3)^5-4\cdot(-4-x)] =$$
$$= 10-[2\cdot(-1-x)^5+16+4x] = 10-2\cdot(-1-x)^5-16-4x = -2\cdot(-1-x)^5-6-4x$$

A.23.05 Spiegeln über Verschieben (∯)

Eine Spiegelung von Funktionen wird auf nur zwei Grundlagen zurückgeführt: Spiegelung an der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse.

Man spiegelt eine Funktion an einer **senkrechten Gerade x=a**, indem man f(x) um „-a“ links/rechts verschiebt, dann an der y-Achse spiegelt und dann wieder um „+a“ zurück verschiebt.

Man spiegelt eine Funktion an einer **waagerechten Gerade y=b**, indem man f(x) um „-b“ hoch/runter verschiebt, dann an der x-Achse spiegelt und dann wieder um „+b“ zurück verschiebt.

Eine Funktion f(x) wird **an einem Punkt S(a|b) gespiegelt**, indem man f(x) an der senkrechten Gerade x=a spiegelt und anschließend an der waagerechten Gerade y=b.

Bsp.12

$f(x) = x+2x^2-e^{2x}$

a) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade x=1.

b) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade y=3.
c) Spiegeln Sie f(x) am Punkt S(1|3).

Lösung:

a) Um an x=1 zu spiegeln, verschieben wir f(x) zuerst um 1 nach links, dann spiegeln wir f(x) an der y-Achse und zum Schluss verschieben wir f(x) wieder um 1 nach rechts.

f(x) um eins nach links verschieben: $x \to x+1$

$f_1(x) = f(x+1) = (x+1)+2\cdot(x+1)^2-e^{2\cdot(x+1)}$

$f_1(x)$ an der y-Achse spiegeln: $x \to -x$

$f_2(x) = f_1(-x) = (-x+1)+2\cdot(-x+1)^2-e^{2\cdot(-x+1)}$

$f_2(x)$ um eins nach rechts zurück verschieben: $x \to x-1$

$f_3(x) = f_2(x-1) = (-(x-1)+1)+2\cdot(-(x-1)+1)^2-e^{2\cdot(-(x-1)+1)}$
$= (-x+1+1)+2\cdot(-x+1+1)^2-e^{2\cdot(-x+1+1)} = (-x+2)+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}$

b) Um an y=3 zu spiegeln, verschieben wir f(x) zuerst um 3 nach unten, dann spiegeln wir f(x) an der x-Achse und zum Schluss verschieben wir f(x) wieder um 3 nach oben.

f(x) um 3 nach unten verschieben: $f(x) \to f(x)-3$

$f_4(x) = f(x)-3 = x+2x^2-e^{2x}-3$

$f_4(x)$ an der x-Achse spiegeln: $f_4(x) \to -f_4(x)$

$f_5(x) = -f_4(x) = -[x+2x^2-e^{2x}-3] = -x-2x^2+e^{2x}+3$

$f_5(x)$ wieder um drei nach oben zurück verschieben: $f_5(x) \to f_5(x)+3$

$f_6(x) = f_5(x)+3 = -x-2x^2+e^{2x}+3 + 3 = -x-2x^2+e^{2x}+6$

c) Um f(x) am Punkt S(1|3) zu spiegeln, spiegeln wir zuerst an der Gerade x=1 [also um 1 nach links verschieben, dann an der y-Achse spiegeln und dann wieder um 1 nach rechts verschieben], danach an der Gerade y=3 [also um 3 nach unten verschieben, dann an der x-Achse spiegeln und dann wieder um 3 nach oben verschieben].

f(x) um eins nach links verschieben: $x \to x+1$

$f_1(x) = f(x+1) = (x+1)+2\cdot(x+1)^2-e^{2\cdot(x+1)}$

$f_1(x)$ an der y-Achse spiegeln: $x \to -x$

$f_2(x) = f_1(-x) = (-x+1)+2\cdot(-x+1)^2-e^{2\cdot(-x+1)}$

$f_2(x)$ um eins nach rechts zurück verschieben: $x \to x-1$

$f_3(x) = f_2(x-1) = (-(x-1)+1)+2\cdot(-(x-1)+1)^2-e^{2\cdot(-(x-1)+1)}$
$= (-x+1+1)+2\cdot(-x+1+1)^2-e^{2\cdot(-x+1+1)} = -x+2+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}$

$f_3(x)$ um 3 nach unten verschieben: $f_3(x) \to f_3(x)-3$

$f_4(x) = f_3(x)-3 = -x+2+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)} - 3 = -x-1+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}$

$f_4(x)$ an der x-Achse spiegeln: $f_4(x) \to -f_4(x)$

$f_5(x) = -f_4(x) = -[-x-1+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}] = x+1-2(-x+2)^2+e^{2x}$

$f_5(x)$ wieder um drei nach oben zurück verschieben: $f_5(x) \to f_5(x)+3$

$f_6(x) = f_5(x)+3 = x+1-2(-x+2)^2+e^{2x} + 3 = x+4-2(-x+2)^2+e^{2x}$

Wenn man Lust hat, kann man die Klammer noch auflösen zu:
$x+4-2(-x+2)^2+e^{2x} = x+4-2(x^2-4x+4)+e^{2x} = x+4-2x^2+8x-8+e^{2x} = -2x^2+9x-4+e^{2x}$