A.26 Ungleichungen

Die Ungleichheitszeichen:

- $<$ „kleiner". $x<3$ bedeutet, dass x alle Werte kleiner als 3 annehmen kann [die Zahl 3 selber kann nicht angenommen werden]
- $>$ „größer". $x>1$ bedeutet, dass x alle Werte größer als 1 annehmen kann [die Zahl 1 selber kann nicht angenommen werden]
- $\leqslant$ „kleiner oder gleich". $x\leqslant 3$ bedeutet, dass x alle Werte annehmen kann, die kleiner oder gleich 3 sind [die Zahl 3 kann angenommen werden]
- $\geqslant$ „größer oder gleich". $x\geqslant 1$ bedeutet, dass x alle Werte annehmen kann, die größer oder gleich 1 sind [die Zahl 1 selber kann nicht angenommen werden]

Die Besonderheit bei Ungleichungen:
-Immer wenn man eine Ungleichung mit einer *negativen* Zahl *multipliziert* oder durch eine negative Zahl *teilt*, ändert sich der Sinn der Ungleichung !

A.26.01 einfache, lineare Ungleichungen (unterstes Niveau) (∰)

Bsp.1
Welche x-Werte erfüllen die Ungleichung: $2x+4>5x-8$?

Lösung:

$2x + 4 > 5x - 8 \qquad |-5x-4$

$-3x > -12 \qquad |:(-3)$

[hier ändert sich nun der Sinn der Ungleichung]

$x < 4$

Eine Ungleichung wird wie eine Gleichung behandelt.

Ausnahme:

Teilt oder multi-pliziert man mit Negativem, ändert sich der Sinn der Ungleichung.
(Das Zeichen dreht sich also um.)

Bsp.2
Bestimmen Sie alle zulässigen Werte von x für:

$$\frac{2x^2+3}{(x-2)^2} < 2$$

Lösung:

$\frac{2x^2+3}{(x-2)^2} < 2 \qquad |\cdot(x-2)^2$

$2x^2+3 < 2\cdot(x-2)^2$

$2x^2+3 < 2\cdot(x^2-4x+4)$

$2x^2+3 < 2x^2-8x+8 \qquad |-2x^2+8x-3$

$8x < 5$

$x < \frac{5}{8}$

Hier kann man seelenruhig mit dem Nenner multiplizieren. „$(x-2)^2$" ist immer positiv, dadurch weiß man, dass sich der Sinn der Ungleichung nie ändert.

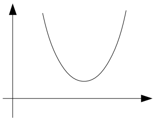
A.26.02 quadratische Ungleichungen (∰) [ebenfalls ohne Fallunterscheidung]

Eine quadratische Ungleichung löst man, indem man sich die zugehörige Parabel (als Skizze) vorstellt [also ob sie nach unten oder nach oben geöffnet ist] und danach die Nullstellen ausrechnet.

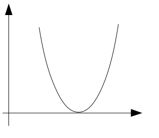
Bsp.3
Welche x-Wert erfüllen die Bedingung $2x^2-6x+4>0$?

Lösung:
Bei „$2x^2-6x+4$“ handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel, da vor „x^2“ eine positive Zahl steht. Nun rechnen wir noch die Nullstellen davon aus.

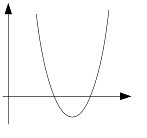
Wozu brauchen wie die Nullstellen?



-Wenn es keine Nullstellen gibt, geht das nur, wenn die Parabel komplett oberhalb der x-Achse liegt. Die Parabel hat also für jeden x-Wert positive y-Werte.



-Wenn es nur eine Nullstelle gibt, geht das nur, wenn die Parabel mit dem Scheitelpunkt genau auf der x-Achse liegt. Die Parabel hat also für *jeden* x-Wert positive y-Werte, außer bei der (einzigen) Nullstelle.



-Wenn es zwei Nullstellen gibt, geht das nur, wenn die Parabel mit dem Scheitelpunkt unter der x-Achse liegt, die Parabel hat also zwischen den Nullstellen negative y-Werte, außerhalb der Nullstellen hat sie positive y-Werte.

Also nochmal: wir brauchen die Nullstellen der Parabel

$$2x^2-6x+4=0$$

(p-q-Formel)

$$2x^2-6x+4=0 \quad |:2$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=+\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}=$$

$$=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$$

(a-b-c-Formel)

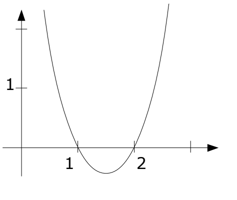
$$2x^2-6x+4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{4}=$$

$$=\frac{6\pm2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad N_1(2|0), \quad N_2(1|0)$$



Zwischen den Nullstellen ist die Parabel negativ, außerhalb der Nullstellen ist sie positiv.

$\Rightarrow$ $2x^2-6x+4>0$ für $x<1$ oder $x>2$

Bsp.4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung: $\frac{6x+9}{x^2} > 3$

Lösung:

$$\frac{6x+9}{x^2} > 3 \qquad |\cdot x^2 \qquad \text{[}x^2\text{ ist immer positiv, daher geht das Multiplizieren]}$$

$$6x+9 > 3\cdot x^2 \qquad |-3x^2$$

$$-3x^2+6x+9 > 0 \qquad |:(-3)$$

$$x^2-2x-3 < 0$$

$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6x+9}{x^2} > 3 \text{ für } x>-1 \text{ und } x<3 \qquad \Rightarrow \mathbf{L} = \{\, x \mid -1<x<3 \,\}$$

Eine Parabel ist zwischen den Nullstellen negativ.

A.26.03 Ungleichungen höherer Potenz (∯) [ohne Fallunterscheidung]

Bsp.5

In welchem Intervall ist $f(x)=x^3-9x$ positiv ?

Lösung:

Ob eine Funktion größer oder kleiner als Null ist, hat natürlich immer etwas mit den Nullstellen zu tun.
Eine sehr gute Idee ist daher häufig, die Berechnung der Nullstellen und eine anschließende Skizze der Funktion.
Den Rest der Aufgabe erledigt man danach mit „Hingucken".

1. Nullstellen:

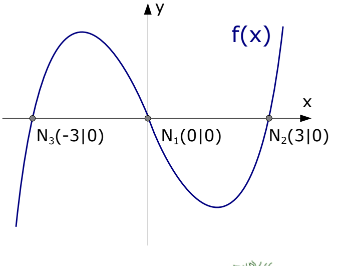
$$x^3-9x = 0 \qquad \text{„x" ausklammern}$$

$$x\cdot(x^2-9) = 0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \qquad \text{oder} \qquad x^2-9=0 \;\Rightarrow\; x_{2,3} = \pm 3$$

2. Skizze:

Tja,.. Wie Sie nun von den Nullstellen auf die Skizze kommen, bleibt Ihnen überlassen. Man könnte ein paar x-Werte in f(x) einsetzen und die y-Werte berechnen [und die Punkte dann einzeichnen], man könnte $x\to\pm\infty$ laufen lassen, oder sonst irgendetwas Intelligentes tun.
Hauptsache, man erhält irgendwie die Skizze.



3. „Hingucken"

Wer Augen hat, der sehe!
Laut Aufgabenstellung, soll f(x) positiv sein. Betrachtet man die Skizze, sieht man, dass das zwischen x=-3 und x=0 der Fall ist, sowie für alle x-Werte, die größer als 3 sind.
Die gesuchten Intervalle sind also]-3;0[und]3;∞[

$\Rightarrow$ I =]-3;0[∪]3;∞[←

Die Nullstellen selber gehören NICHT zum Intervall, denn „positiv" bedeutet GRÖßER als Null. Daher zeigen die Intervallklammern nach außen.

Bsp.6

In welchem Intervall ist $f(x)=0{,}5x^4-4x^2+8$ kleiner als Null?

Lösung:

Wir bestimmen wieder zuerst die Nullstellen.

1. Nullstellen:

$0{,}5x^4-4x^2+8 = 0$ Substitution $u=x^2$

$0{,}5u^2-4u+8 = 0$ a-b-c-Formel oder p-q-Formel

$\Rightarrow u_{1,2}=\ldots=+4$ Resubstitution

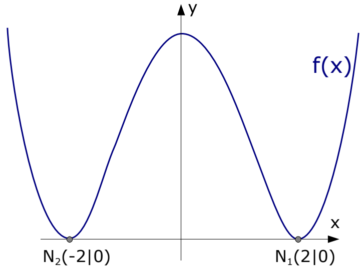
$x^2 = 4$

$\Rightarrow x_1=2 \quad x_2=-2$

2. Skizze:

Wertetabelle oder Denken.

[Interessant an dieser Funktion sind die *doppelten* Nullstellen bei x=2 und x=-2. Dadurch, dass in der Substitution eine doppelte Nullstelle bei u=4 `rauskam, gibt es eine doppelte Nst. bei x=2 und eine doppelte Nst. bei x=-2. Doppelte Nullstellen sind Berührpunkte mit der x-Achse, so dass die Funktion eben so aussieht, wie sie halt aussieht. Skizziert man f(x) über eine Wertetabelle sind diese Überlegungen nicht notwendig.]



3. „Hingucken"

Laut Aufgabenstellung, soll f(x) kleiner als Null sein. Das ist nirgends der Fall.

Dem fette Andword: **Dem Funzion isch nix negativ. Nimalz.**

A.26.04 Bruch-Ungleichungen mit Fallunterscheidung (∲)

Wenn man eine Ungleichung mit etwas multiplizieren muss [z.B. mit einem Nenner], von dem man nicht weiß, ob es positiv oder negativ ist, kommt man um eine Fallunterscheidung nicht herum.

Wandeln wir Bsp.4 ein wenig ab:

Bsp.7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung: $\frac{6x+9}{x} > 3$

Lösung:

$\frac{6x+9}{x} > 3 \qquad |\cdot x$

x kann positiv oder negativ sein, wir wissen daher nicht, ob man Vorzeichen umdrehen muss oder nicht.

⇒ Fallunterscheidung

Fall I) Sei $x>0$

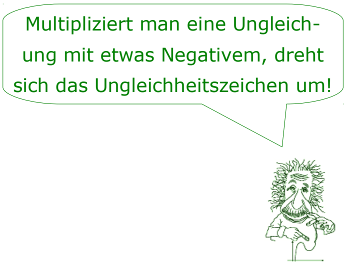
$\frac{6x+9}{x} > 3 \qquad |\cdot x$

$6x+9 > 3x \qquad |-3x$

$3x+9 > 0 \qquad |-9 \quad |:3$

$x > -3$
Interpretation des Ergebnisses:
Wir betrachten hier nur den Fall, dass $x>0$ ist, gleichzeitig erhalten wir, dass $x>-3$ sein soll. *Beides* ist nur möglich, wenn $x>0$.
⇒ Lösung des ersten Falles: **$x>0$**

Fall II) Sei $x<0$



$\frac{6x+9}{x} > 3 \qquad |\cdot x$
$6x+9 < 3x \qquad |-3x$
$3x+9 < 0 \qquad |-9 \quad |:3$
$x < -3$
Interpretation des Ergebnisses:
Wir betrachten hier nur den Fall, dass $x<0$ ist, gleichzeitig erhalten wir, dass $x<-3$ sein soll. *Beides* ist nur möglich, wenn $x<-3$.
⇒ Lösung des zweiten Falles: **$x<-3$**

Beide Fälle zusammengenommen:
Die Ungleichung ist lösbar, wenn **$x>0$** [Fall I] oder **$x<-3$** [Fall II]
⇒ **$L = \{ x \mid x>0 \wedge x<-3 \}$**

Bsp.8

Welche x-Werte erfüllen die Bedingung $\frac{4x+2}{3x-3} > 2$?

Lösung:

$\frac{4x+2}{3x-3} > 2 \qquad |\cdot(3x-3)$

(3x−3) kann positiv oder negativ sein, wir wissen daher nicht, ob man Vorzeichen umdrehen muss oder nicht.
⇒ Fallunterscheidung

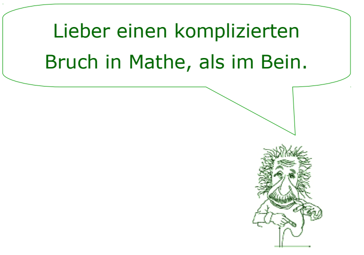
Fall I) $3x-3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$
$\frac{4x+2}{3x-3} > 2 \qquad |\cdot(3x-3)$
$4x+2 > 6x-6 \qquad |-6x-2$
$-2x > -8 \qquad |:(-2)$ (♪)
$x < 4$
Gesamtbetrachtung von Fall I) ⇒ $x>1$ und $x<4$ ⇒ **$1<x<4$**

Fall II) $3x-3<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<1$
$\frac{4x+2}{3x-3} > 2 \qquad |\cdot(3x-3)$ (♪)
$4x+2 < 6x-6 \qquad |-6x-2$
$-2x < -8 \qquad |:(-2)$ (♪)
$x > 4$
Gesamtbetrachtung von Fall II) ⇒ $x<1$ und $x>4$ ⇒ **unmöglich**

⇒ **$L = \{ x \mid 1<x<4 \}$**

♪ Multipliziert oder teilt man eine Gleichung mit etwas Negativem, dreht sich das Zeichen um.

A.26.05 komplizierte Brüche (∮)



Bei komplizierten Ungleichungen kann es sein, dass man 2 oder 3 verschachtelte Fallunterscheidungen hat. Das ist natürlich ein „bisschen" komplex und unmenschlich, daher hat Amnesty International diese Rechenmethode als Folter deklariert.
Seitdem macht man statt 2 oder mehr Fallunterscheidungen eine andere Methode:
Bei komplizierten Brüchen bringt man alles auf eine Seite [so dass auf der anderen Seite =0 steht] und bringt alles auf einen Nenner.
Im zweiten Schritt berechnet man Zählernullstellen und Nennernullstellen und trägt diese in eine Tabelle ein. Den Rest kann man ablesen. (Siehe Beispiele !)

Bsp.9

Lösen Sie die wundervolle Ungleichung: $\frac{3x+4}{x^2-4}<-1$

Lösung:

$\frac{3x+4}{x^2-4}<-1$ Wir bringen alles auf die linke Seite.

$\frac{3x+4}{x^2-4}+1 = 0$ Wir bilden den Hauptnenner.

$\frac{3x+4}{x^2-4}+\frac{x^2-4}{x^2-4} = 0$ zusammenfassen

$\frac{x^2+3x}{x^2-4}<0$

Zählernullstellen: $x^2+3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot(x+3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=0 \quad x_2=-3$

Nennernullstellen: $x^2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=+2 \quad x_2=-2$

Nun machen wir schön brav eine Tabelle, mit vier Zeilen: die obere für die x-Werte, in die zweite und dritte Zeile tragen wir die Nullstellen vom Zähler und Nenner ein und in vierte erst `mal noch gar nichts.

x-Werte		-3		-2		0		2	
x^2+3x		0				0			
x^2-4				0				0	
Bruch									

Wir haben für den Zähler drei relevante x-Intervalle: erstes Intervall von -∞ bis -3; das zweite Intervall von -3 bis 0; das letzte Intervall von 0 bis +∞. Wir müssen wissen, welches Vorzeichen der Zähler in diesen Intervallen hat. Daher setzen wir aus jedem Intervall *irgendeine* Zahl in „x^2+3x" ein und notieren nur das Vorzeichen.

x-Werte		-3		-2		0		2	
x^2+3x	+	0	–	–	–	0	+	+	+
x^2-4				0				0	
Bruch									

Aus dem ersten Intervall kann man beispielsweise „-5“ einsetzen und erhält „+10“, aus dem zweiten Intervall (-3<x<0) kann man „-1“ einsetzen und erhält „-2“. Aus dem letzten Intervall (0<x<∞) kann man „+1“ einsetzen und erhält „+4“. Mit den Vorzeichen dieser Ergebnisse füllt man die Intervalle des Zählers aus.

Im Nenner gibt es ebenfalls drei relevante x-Intervalle: erstes Intervall von -∞ bis -2; das zweite Intervall von -2 bis 2; das letzte Intervall von 2 bis +∞. Wir setzen wieder aus jedem Intervall irgendeinen x-Wert ein und notieren das Vorzeichen.

x-Werte		-3		-2		0		2	
x^2+3x	+	0	–	–	–	0	+	+	+
x^2-4	+	+	+	0	–	–	–	0	+
Bruch									

Aus dem ersten Intervall kann man beispielsweise „-4“ einsetzen und erhält „+12“, aus dem zweiten Intervall (-2<x<2) kann man „0“ einsetzen und erhält „-4“. Aus dem letzten Intervall (2<x<∞) kann man „+3“ einsetzen und erhält „+5“. Die Vorzeichen tragen wir ein.

Jetzt lesen wir ab, in welchem Intervall der Bruch welches Vorzeichen hat.

Für -∞<x<-3 sind Zähler und Nenner beide positiv, man hat den Fall: $\frac{+}{+}=+$

Für x=-3 hat man $\frac{0}{-}=0$

Für -3<x<-2 hat man $\frac{-}{+}=-$

Für x=-2 hat man $\frac{-}{0}$, was nicht definiert ist [Man darf nicht durch „0“ teilen]

Für -2<x<0 hat man $\frac{-}{-}=+$

...

x-Werte		-3		-2		0		2	
x^2+3x	+	0	–	–	–	0	+	+	+
x^2-4	+	+	+	0	–	–	–	0	+
Bruch	+	0	–	/	+	0	–	/	+

Man kann an dieser Tabelle also alles ablesen: Bei „-2“ und bei „+2“ ist der Bruch nicht definiert, hat also jeweils eine Polstelle. Bei „-3“ und „0“ hat der Bruch eine Nullstelle.
In den Intervallen]-∞;-3[ ]-2;0[und]+2;+∞[ist der Bruch positiv.
In den Intervallen]-3;-2[und]0;2[ist der Bruch negativ und das ist schließlich das, was wir haben wollten.

Die Antwort lautet also: $\frac{3x+4}{x^2-4}<-1$ gilt in den Intervallen **]-3;-2[und]0;2[**.

Bsp.10

Lösen Sie die Ungleichung: $\frac{x+1}{x^2+6x+5} < \frac{1}{7}$!

Lösung:

$\frac{x+1}{x^2+6x+5} < \frac{1}{7}$ wir bringen alles auf die linke Seite.

$\frac{x+1}{x^2+6x+5} - \frac{1}{7} < 0$ Hauptnenner bilden

$\frac{7\cdot(x+1)}{7\cdot(x^2+6x+5)} - \frac{1\cdot(x^2+6x+5)}{7\cdot(x^2+6x+5)} < 0$

$\frac{7\cdot(x+1) - 1\cdot(x^2+6x+5)}{7\cdot(x^2+6x+5)} < 0$ zusammenfassen

$\frac{-x^2+x+2}{7\cdot(x^2+6x+5)} < 0$

Zählernullstellen:

$-x^2+x+2 = 0$ a-b-c-Formel oder p-q-Formel

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

Nennernullstellen:

$7\cdot(x^2+6x+5) = 0$ a-b-c-Formel oder p-q-Formel

$x_1 = -1 \quad x_2 = -5$

Nun machen wir wieder schön brav eine Tabelle, mit vier Zeilen: die obere für die x-Werte, in die zweite und dritte Zeile tragen wir die Nullstellen vom Zähler und Nenner ein und in vierte kommt das Ergebnis für den gesamten Bruch.

x-Werte		-5		-1		2	
$-x^2+x+2$				0		0	
$7\cdot(x^2+6x+5)$		0		0			
Bruch							

Wir haben wieder drei Intervalle für den Zähler und drei Intervalle für den Nenner. Wir brauchen die Vorzeichen von Zähler und Nenner in den jeweiligen Intervallen. Dafür setzen wir *irgendwelche* Zahlen der Intervalle ein.

x-Werte		-5		-1		2	
$-x^2+x+2$	–	–	–	0	+	0	–
$7\cdot(x^2+6x+5)$	+	0	–	0	+	+	+
Bruch							

Wenn man Zählervorzeichen durch Nennervorzeichen teilt, erhält man das Vorzeichen des gesamten Bruchs. Damit weiß man also, dass $\frac{-x^2+x+2}{7\cdot(x^2+6x+5)} < 0$ in den folgenden Intervallen gilt:

$x \in]-\infty;-5[$ oder $x \in]2;+\infty[$

x-Werte		-5		-1		2	
$-x^2+x+2$	–	–	–	0	+	0	–
$7\cdot(x^2+6x+5)$	+	0	–	0	+	+	+
Bruch	–	/	+	/	+	0	–

$\Rightarrow$ **L = { x | x<-5** oder **x > 2 }**