Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

matheseite
Die gute Seite an Mathe.

A.31 Transferaufgaben

Für „Transferaufgaben" oder auch „anwendungsorientierte Aufgaben" gibt es recht viele Namen. Im Wesentlichen fallen so ziemlich alle Aufgaben darunter, die irgendwie einen Bezug zum realen Leben haben.

Die Lösungen aller Aufgaben werden „von Hand" gerechnet, also nur mit einem einfachen Taschenrechner, ohne GTR oder CAS. Falls Sie einen *GTR* oder *CAS* verwenden dürfen, können Sie die Lösungen wesentlich einfacher gestalten.

A.31.01 Bestandsänderungen (∯)

Aufgaben zu Bestandsänderungen werden im Matheunterricht zunehmend wichtiger. Was versteht man überhaupt unter „Bestandsänderungen"?
Bei Bestandsänderungen geht es immer um einen Bestand und dessen Änderung.

Die Änderung eines Bestands ist immer die Ableitung des Bestands.
Umgekehrt gilt: **Der Bestand ist das Integral der Änderung**.

In den Aufgaben ist entweder die Bestandsfunktion gegeben und man braucht die Änderung oder es ist die Änderung gegeben und man braucht den Bestand.
Ihre Aufgabe ist es herauszufinden, welches von beiden gegeben ist und welches gesucht ist.
Zum Beispiel: Ein Schwimmbecken wird gefüllt und man kennt die Funktion, die den *Zulauf* des Wassers beschreibt. Gesucht sind Aussagen über die Menge des Wassers, welche sich im Schwimmbecken befindet.
[Die Antwort: Der Zulauf ist die Änderung und damit die Ableitung der Gesamtmenge.]

Aufgabe 1 Omas Zusatzrente [möglicherweise realistisches Beispiel]
Eine Oma hat 150€ unter ihrer Matratze versteckt. Da sie unbedingt in ihrem Leben noch einmal in die Mongolei fliegen will und 150€ dafür zu wenig sind, beschließt sie ihre Rente bzw. ihr „Matratzenlager" aufzubessern.
Was liegt da näher, als Sportwetten? Ihr Enkel meldet sie sofort bei einem Wettbüro an und die Oma legt los. Sie tüftelt diverse Systeme aus, füllt ganze Tabellen mit Spielplänen und -ergebnissen aus [sie hat ja genügend Zeit, sie ist ja Rentnerin] und liest die krassesten mathematischen Bücher zur Spieltheorie. Der Aufwand scheint sich zu lohnen, denn sie gewinnt anfangs tatsächlich. Ihr täglicher Gewinn lässt sich näherungsweise durch eine Formel bestimmen:

$r(t) = 5+5t-5e^{0{,}05t}$ (t in vergangenen Tagen, r(t) in Euro).

a) Über wieviel Geld darf sich Oma anfangs freuen?
b) Nach wieviel Tagen gewinnt Oma das meiste Geld? Wieviel Geld ist das?
c) Bestimmen Sie eine Funktion, die Omas Gesamtvermögen beschreibt.
d) Zeigen Sie, dass Oma im Laufe des 91. Tages das meiste Geld unter der Matratze versteckt hat. Wieviel Geld ist das ungefähr?
e) Ab welchem Tag verliert Oma erstmalig Geld?
f) Bestimmen Sie näherungsweise, wann Oma pleite ist.

Lösung auf Seite 4.

Aufgabe 2 Kleinkindwachstum [ziemlich realistisches Beispiel]

Neugeborene wiegen bei Geburt durchschnittlich 2.850 Gramm.
Die tägliche Gewichtszunahme eines Kleinkindes kann in den ersten drei Jahren durch die Funktion z(t) [1] beschrieben werden, mit:

$$z(t) = \frac{180}{\sqrt{t+36}} + 3$$

z(t) = Gewichtszunahme (in Gramm)
t = Alter (in Tagen)

a) Wieviel Gramm würde das Kind demnach anfangs zunehmen?
b) Wieviel Gramm würde das Kind im ersten Monat zunehmen?
[Jeder Monat habe 30 Tage.]
c) In welchem Alter beträgt die monatliche Gewichtszunahme 600g?
d) Wann in etwa wiegt das knuffelige, putzige, süße Kindchen 5kg?
e) Wieviel wird das Kind nach 3 Jahren wiegen?
f) Wie stark wird sich das Gewicht nach diesen 3 Jahren monatlich erhöhen?

Lösung auf Seite 5.

Aufgabe 3 Joggeraufgabe [ziemlich realistisches Beispiel]

Flitzi, die Fliege, fliegt durch die Gegend. Es ist heiß, die Sonne brennt. Das ist zwar für Insekten nicht so arg schlimm, jedoch ist die Landschaft ziemlich ausgetrocknet. Da nimmt Flitzi plötzlich einen herrlichen Duft wahr. Es riecht angenehm salzig, ein bisschen feucht, ja sogar ein bisschen nach Kadaver. Flitzi fliegt intuitiv, lässt sich von seinem Geruchssinn unbewusst steuern und da sieht er es. Ein Menschen-Jogger[2]! Selbstverständlich ist Flitzi nicht die einzige Fliege, die diesen Leckerbissen wahrgenommen hat. Das wäre auch etwas blöd, denn als einzige Fliege würde man immer von der Joggerin weggescheucht werden. Die Anzahl der Fliegen wird von Minute zu Minute größer. Sie lässt sich durch eine Formel beschreiben, die in der Fliegensprache sehr einfach ist, die Übersetzung ins Menschliche ist jedoch etwas umständlich.

$$n(t) = \frac{50t-600}{t+15} + 45$$

n(t) = Anzahl der Fliegen
t = Zeit (in Minuten)

a) Wieviel Fliegen umschwirren die leckere Joggerin am Anfang?
Wieviel sind es nach 10 Minuten?
b) Wieviel Fliegen stoßen in der 15. Minute dazu?
c) In welcher Minute stoßen 2 Fliegen dazu?
d) Wieviel Fliegen kommen von der 8. bis zur 20. Minute dazu?
e) Wieviel Fliegen werden sich langfristig um unsere Joggerin ansammeln?
f) Wie heißt die [aus menschlicher Sicht bedauernswerte] Joggerin?
g) In welcher Minute erhöht sich die Fliegenanzahl um weniger als ein Exemplar?

Lösung auf Seite 6.

1 Das Einzige unrealistische ist, dass Kleinkinder sich im Wachsen dummerweise nicht perfekt an diese Formel halten. Man sollte die Formel also nur als Durchschnittwerte verstehen. Die Abweichung von der vorgegebenen Formel liegen im Normalfall bei ±20%.

2 Natürlich ist es der Fliege vollkommen egal, ob es sich um einen männlichen Jogger oder eine weibliche Joggerin handelt. Es ist aber eine Joggerin!

Lösung von Aufgabe 1:

a) Anfangs ist noch keine Zeit vergangen, es gilt also t=0.
$r(0) = 5+5\cdot 0-5e^0 = 0€$ Oma gewinnt am Anfang nichts!

b) Das meiste Geld gewinnt Oma beim Hochpunkt von r(t). $\Rightarrow$ r'(t)=0
$r(t) = 5+5t-5e^{0,05t}$
$\Rightarrow r'(t) = 5-5\cdot 0,05\cdot e^{0,05t} = 5-0,25e^{0,05}$
$\Rightarrow 5-0,25e^{0,05t} = 0 \quad | -5$
$-0,25e^{0,05t} = -5 \quad |:(-0,25)$
$e^{0,05t} = 20 \quad | \ln(\ )$
$0,05t = 2,996 \quad |:0,05$
$t = 59,91$

Falls Sie einen GTR oder CAS verwenden dürfen, können r'(t)=0 damit lösen.

Nach ca. 60 Tagen gewinnt Oma am meisten Geld.
Sie gewinnt $r(60) = 5+5\cdot 60-5e^{0,05\cdot 60} = 204,57€$ an diesem einen Tag.

c) Uns interessiert in diesem Fall nicht, wieviel Geld Oma täglich gewinnt, sondern nur die Gesamtmenge des Geldes, also das Gesamtvermögen der Oma.
Bezeichnen wir Omas *Gesamtvermögen* mit R(t).
Das Geld, das Oma *täglich* verdient [wird durch r(t) beschrieben] ändert das Gesamtvermögen [also R(t)]. Deswegen ist r(t) die Ableitung von R(t).
Also ist R(t) die Stammfunktion von r(t).
$r(t) = 5+5t-5e^{0,05t}$
$\Rightarrow R(t) = 5t+\frac{5}{2}t^2-\frac{5}{0,05}e^{0,05t}+c = 5t+2,5t^2-100e^{0,05t}+c$
Nun müssen wir noch c bestimmen:
Wir wissen, dass Oma am Anfang 150€ hatte, damit gilt: R(0) = 150.
$R(0) = 150$
$\Leftrightarrow 5\cdot 0+2,5\cdot 0^2-100e^{0,05\cdot 0}+c = 150 \Leftrightarrow -100+c = 150 \Leftrightarrow c=250.$
Die Funktion, die Omas Gesamtvermögen beschreibt, lautet also:
$\mathbf{R(t) = 5t+2,5t^2-100e^{0,05t}+250}$.

d) Das meiste Geld besitzt Oma, wenn R(t) ein Maximum annimmt.
Es muss also gelten: R'(t)=0 bzw. r(t)=0, und das für den 91. Tag.
[Falls der GTR/CAS erlaubt ist, verwendet man den, ansonsten von Hand rechnen.]
Nach 90 Tagen gilt: $r(90)=5+5\cdot 90-5e^{0,05\cdot 90} \approx 4,91$
Nach 91 Tagen gilt: $r(91)=5+5\cdot 91-5e^{0,05\cdot 91} \approx -13,2$
Da die y-Werte beider Zeitpunkte unterschiedliche Vorzeichen haben, muss dazwischen eine Nullstelle sein.
Oma besitzt **im Laufe des 91. Tages** das meiste Geld unter der Matratze.
Wieviel Geld besitzt Oma an diesem Tag?
An diesem Tag gilt t=90 oder t=91 oder noch besser: t=90,5
$R(90,5) = 5\cdot 90,5+2,5\cdot 90,5^2-100e^{0,05\cdot 90,5}+250 \approx$ **11.948,53€**

e) Wenn Oma Geld verliert, bedeutet das, dass sich ihr Vermögen wieder verringert. Das ist ab dem Maximum der Fall, welches wir bereits vorher in Teilaufgabe d) bestimmt haben.
Das ist ab dem 91. Tag der Fall.
$\Rightarrow$ Oma verliert ab dem 91. Tag erstmalig Geld.

f) Oma ist natürlich pleite, wenn Ihr Gesamtvermögen Null wird. Wir brauchen

eine Nullstelle von der Funktion R(t). ⇒ R(t)=0
Die Nullstelle soll näherungsweise bestimmt werden.
$5t+2{,}5t^2-100e^{0{,}05t}+250 = 0$
Diese Gleichung kann man mit einem Näherungsverfahren bestimmen (z.B. mit dem Newton-Verfahren) oder man probiert mehrere Werte für „t" so lange aus, bis man ungefähr auf die Nullstelle stößt.
Sie werden feststellen, dass die Nullstelle zwischen t=117 und t=118 liegt.
⇒ Die Oma ist also **ab dem 119. Tag pleite** und wird nie in die Mongolei reisen können!

(Die Kontodaten für mitleidige Spenden können beim Autor erfragt werden.)

Lösung von Aufgabe 2
Vorüberlegung:
z(t) ist die Gewichts*zunahme*, also die *Änderung* des Gewichts. z(t) ist daher die Ableitung der Gewichtsfunktion. Nennen wir die Gewichtsfunktion **g(t)**, dann gilt g'(t)=z(t) bzw. g(t) ist die Stammfunktion von z(t).
Bestimmung der Gewichtfunktion:

$$z(t) = \frac{180}{\sqrt{t+36}}+3 = \frac{180}{(t+36)^{0{,}5}}+3 = 180\cdot(t+36)^{-0{,}5}+3.$$

Stammfunktion: $g(t) = \frac{180}{0{,}5}\cdot(t+36)^{0{,}5}+3t+c = 360\cdot\sqrt{t+36}+3t+c.$

Bestimmung von c: Zum Zeitpunkt t=0 gilt das Gewicht: g(0)=2850

$\Rightarrow\ 2850 = 360\cdot\sqrt{0+36}+3\cdot 0+c \ \Rightarrow\ 2850 = 2160+c \ \Rightarrow\ c=690$

$\Rightarrow\ \mathbf{g(t) = 360\cdot\sqrt{t+36}+3t+690}.$

a) Anfangs ist für das Baby noch keine Zeit vergangen, es gilt daher t=0.
⇒ Zunahme am Anfang: $z(0) = \frac{180}{\sqrt{0+36}}+3 =$ **33 Gramm.**

b) Lösungsweg 1: $\int_0^{30} z(t)\,dt = \ldots$ [verfolgen wir hier nicht weiter].
Lösungsweg 2: wir bestimmen mit g(30) das Gewicht nach einem Monat und ziehen dann das Anfangsgewicht ab.
$g(30) = 360\cdot\sqrt{30+36}+3\cdot 30+690 \approx 3705$ g
Das Baby hat also 3705–2850 = **855 Gramm zugenommen**.

c) Die monatliche Gewichts*zunahme* soll 600g betragen. Es geht also um die Funktion z(t). Da wir in Tagen rechnen, nicht in Monaten, brauchen wir die *tägliche* Gewichtszunahme. Diese beträgt $\frac{600}{30}=20$ (Gramm pro Monat).

$\Rightarrow\ z(t) = 20$

$\frac{180}{\sqrt{t+36}}+3 = 20 \qquad |-3$

$\frac{180}{\sqrt{t+36}} = 17 \qquad |\cdot\sqrt{t+36} \qquad |:17$

$10{,}59 = \sqrt{t+36} \qquad |\ (\ )^2$

$112{,}15 = t+36 \qquad \Rightarrow \qquad t\approx 76$

Nach 76 Tagen, also **nach ca 2,5 Monaten** liegt die monatliche Gewichtszunahme bei 600 Gramm.

d) Das Kind soll 5kg = 5000g wiegen. Es geht um das *Gewicht*, nicht um die Gewichts*zunahme*, also muss gelten: g(t)=5000

$\Rightarrow\ 5000 = 360\cdot\sqrt{t+36}+3t+690$ | $-690-3t$

[Eine Wurzelgleichung löst man immer, indem man nur die Wurzel auf der einen Seite stehen lässt und alles andere auf die andere Seite der Gleichung bringt.]

$4310-3t = 360\cdot\sqrt{t+36}$ | :360

$\frac{431}{36}-\frac{t}{120} = \sqrt{t+36}$ | $(\ )^2$

$\left(\frac{431}{36}-\frac{t}{120}\right)^2 = t+36$ | binomische Formel

$143{,}33-0{,}2t+0{,}0000694t^2 = t+36$ | $-t-36$

$0{,}0000694t^2-1{,}2t+107{,}33 = 0$

[p-q-Formel oder a-b-c-Formel. Machen wir hier nicht im Detail.]

$\Rightarrow\ t_1=17201\ ;\ t_2=89{,}91.$

[17.201 Tage sind 47 Jahre. So lange möchten wir wohl nicht beim Kind warten.]

$\Rightarrow\ t=89{,}91$

Nach ca. 90 Tagen hat das Kind um 5kg zugenommen.

e) Das ist wieder einfach. Drei Jahre sind 3·365 = 1095 Tage.
Das Gewicht nach dieser Zeit ist:
$g(1095) = 360\cdot\sqrt{1095+36}+3\cdot 1095+690 \approx 16082g \approx 16{,}08kg$

f) Wir brauchen die monatliche Gewichts*zunahme*.
z(t) beschreibt aber die *tägliche* Gewichtszunahme. Das ist nicht schlimm.
Wir berechnen zuerst die tägliche Gewichtszunahme nach 3 Jahren (3Jahre sind 3·365 = 1095Tage): $z(1095) = \frac{180}{\sqrt{1095+36}}+3 \approx 8{,}35$.
Die tägliche Gewichtszunahme beträgt 8,35 Gramm.
⇒ Die **monatliche Gewichtszunahme** beträgt 30·8,35 = **250,5 Gramm**.

Lösung von Aufgabe 3:
Eigentlich steht das Wesentliche schon da. Nämlich, dass n(t) die *Anzahl* der Fliegen ist. Damit ist n'(t) die *Zunahme* der Fliegen. Der Rest ist nur noch Einsetzerei. Bestimmen wir n'(t).
n'(t) kann man entweder über die Quotientenregel bestimmen oder indem man n(t) zuerst umschreibt und dann mit Produkt- und Kettenregel ableitet.
Ohne besonderen Grund zeigen wir hier die zweite Variante.

$$n(t) = \frac{50t-600}{t+15}+45 = (50t-600)\cdot(t+15)^{-1} + 45$$

[Ableiten mit Produktregel: $u=50t-600 \Rightarrow u'=50$. $v=(t+15)^{-1} \Rightarrow v'=-1\cdot(t+15)^{-2}$. Die „45" fällt weg.]

$$n'(t) = u'\cdot v+u\cdot v' = 50\cdot(t+15)^{-1}+(50t-600)\cdot(-1)\cdot(t+15)^{-2}$$

$$= \frac{50}{t+15}+\frac{(50t-600)\cdot(-1)}{(t+15)^2} = \text{[ersten Bruch erweitern]} = \frac{50\cdot(t+15)}{(t+15)^2}+\frac{-50t+600}{(t+15)^2}$$

$$= \frac{50t+750}{(t+15)^2}+\frac{-50t+600}{(t+15)^2} = \frac{50t+750-50t+600}{(t+15)^2} = \frac{1350}{(t+15)^2} \qquad \leftarrow \mathbf{n'(t)}$$

a) Die Anzahl der Fliegen ist gefragt. Also verwenden wir die Funktion n(t) und setzen da die Zeitpunkte t=0 und t=10 ein.

$n(0) = \frac{50\cdot 0-600}{0+15}+45 = 5\ ; \qquad n(10) = \frac{50\cdot 10-600}{10+15}+45 = 41$

Anfangs sind´s 5 Fliegen, nach 10 Minuten sind´s 41 Fliegen.

b) Die Fliegen, die dazustoßen, sind ja die *Zunahme* der Fliegen. Daher müssen wir t=15 in die *Ableitungs*funktion n'(t) einsetzen:

$$n'(15) = \frac{1350}{(15+15)^2} = 1{,}5.$$

In der 15. Minute kommen ca. anderthalb Fliegen dazu.

c) Es geht wieder um die Zunahme pro Minute, also n'(t). Wir müssen wissen, wann die Ableitung n'(t) den Wert 2 annimmt.

$n'(t) = 2$

$\frac{1350}{(t+15)^2} = 2 \qquad |\cdot(t+15)^2 \quad |:2$

$675 = (t+15)^2 \qquad |\sqrt{\ }$

$\pm 25{,}98 = t+15 \qquad | -15$

$\Rightarrow t_1 \approx 11\ ;\ t_2 \approx -41$ [Negative Zeiten ignorieren wir]

In der 11. Minute nimmt die Anzahl der Fliegen um 2 Stück zu.

d) Lösungsweg 1: Es geht um die Fliegen, die dazu kommen, also um n'(t). Die *Gesamt*anzahl der dazu kommenden Fliegen wird durch das Integral von n'(t) bestimmt. Man rechnet also $\int_8^{20} n'(t)\,dt$... Es geht auch einfacher:

Lösungsweg 2: Wir berechnen die Anzahl der Fliegen nach 20 Minuten und berechnen die Anzahl der Fliegen nach 8 Minuten. Die Differenz ist natürlich die Anzahl der Fliegen, die dazu gekommen sind.

$$n(20) = \frac{50\cdot 20-600}{20+15}+45 \approx 56{,}43 \quad ; \qquad n(8) = \frac{50\cdot 8-600}{8+15}+45 \approx 36{,}30$$

Im Zeitraum sind 56,43–36,30 ≈ **20 Fliegen dazugekommen**.

e) Gesucht ist der Grenzwert der Funktion, also $\lim\limits_{t\to\infty} n(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{50t-600}{t+15}+45$.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, den Grenzwert eines Zählers zu betrachten. Hier ist eine davon: Betrachten Sie den Zähler. Wenn „t“ gegen Unendlich geht, geht auch „50t“ gegen Unendlich. Die Zahl „600“ spielt im Vergleich einfach keine Rolle. Das Gleiche gilt für den Nenner. Die Zahl „15“ spielt neben „t“ keine Rolle, wenn $t\to\infty$. Daher weiß man:

Der Bruch $\frac{50t-600}{t+15}$ verhält sich näherungsweise wie $\frac{50t}{t}$ [wenn $t\to\infty$].

Nun kann man „t“ kürzen und erhält „50“. Der Bruch geht also gegen 50.

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{50t-600}{t+15}+45 = \lim_{t\to\infty} 50+45 = 95.$$

Langfristig kreisen 95 Fliegen um die Joggerin.

f) Nun. Ein jeder und eine jede muss wohl zugeben, dass das eine äußerst einfache, ja sogar triviale Frage ist. Die Joggerin heißt **Luise**.

g) Eigentlich ist es genau die gleiche Fragestellung wie in Teilaufgabe c). Wir suchen die *Zunahme* der Fliegenanzahl, daher brauchen wir die Ableitungsfunktion n'(t) und diese soll kleiner Wert 1 annehmen.

$\Rightarrow n'(t) < 1$ [Mit „<“ rechnen wir fast gleich wie mit „=“.]

$\frac{1350}{(t+15)^2} < 1 \qquad |\cdot(t+15)^2$

$1350 < (t+15)^2 \qquad |\sqrt{\ }$

[Eigentlich müsste man beim Wurzelziehen links ein „±“ hin schreiben. Aber bei der Minus-Lösung kommen sowieso nur negative Zahlen raus, das ignorieren wir daher.]

$36{,}74 < t+15 \qquad | -15$

$21{,}74 < t \quad \Rightarrow \quad t > 21{,}74$

Ab der 22. Minute kommt weniger als eine Fliege pro Minute dazu.

A.31.02 Funktionsanpassung (∯)

„Funktionsanpassung“ heißt: Es gibt einen bestimmten Sachverhalt, der durch eine Funktion beschrieben wird. Es sind mehrere Bedingungen gegeben und man muss die Gleichung der Funktion angeben, die dazu passt.
Dieser Typ von Aufgaben heißt auch „**Steckbriefaufgaben**“.
Bitte beachten Sie, dass **Kapitel A.46.05** hierzu recht artverwandt ist!

Aufgabe 4 Römerbrücke

Eine, von den Römern erbaute, Brücke hat die Form einer quadratischen Parabel. An ihrem Fuß ist sie 6m breit und an ihrem höchsten Punkt ist sie 12m hoch. Bestimmen Sie eine Funktion, mit welcher die Brückenform beschrieben werden kann. Wie breit ist die Brücke in halber Höhe?

Lösung auf Seite 9.

Aufgabe 5 Fallschirmspringer

Die Vertikalgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers wird durch $v(t)=a\cdot e^{-k\cdot t}+b$ beschrieben. Bei Absprung ist die Vertikalgeschwindigkeit Null, nach einer Sekunde liegt die Geschwindigkeit bereits bei 35km/h. Die Hälfte der Endgeschwindigkeit ist nach 4 Sekunden erreicht.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die die Geschwindigkeit beschreibt.
Welches ist die höchste Geschwindigkeit, die der Springer erreichen kann?

Lösung auf Seite 9.

Aufgabe 6 Berglandschaft

Eine Berglandschaft kann im Intervall [-2;6] durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden. Wenn man den Ursprung in den tiefsten Punkt der Landschaft legt, so registriert man 200 Meter weiter im Osten bereits eine Steigung von 150%. Weitere 200 Meter östlich befindet sich der höchste Punkt.
(Eine Längeneinheit entspricht 100 Meter.)

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion, durch welche die Berglandschaft beschrieben werden kann.
b) Wie hoch liegt der höchste Punkt der Landschaft?

Lösung auf Seite 10.

Lösung von Aufgabe 4:

Für eine quadratische Gleichung wählt man den Ansatz: $p(x) = ax^2+bx+c$.

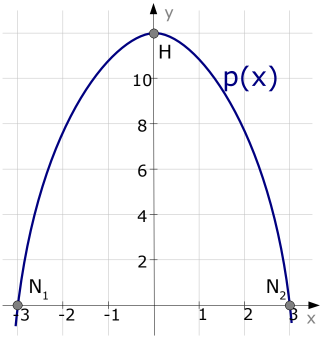
Einfachheitshalber stellt man sich die Parabel aber symmetrisch zur y-Achse vor.

Die Parabel hat also die Gleichung: $p(x) = ax^2+c$.

[Achsensymmetrische Funktionen haben nur gerade Hochzahlen!]

Da die Parabel unten 6m breit ist, hat sie damit die Nullstellen $N_1(-3|0)$ und $N_2(3|0)$.

Die Höhe von 12m impliziert einen Punkt H(0|12).



Nun setzen wir alle Punkte in die Parabelgleichung ein:

N_1: $x=-3$; $y=0$ ⇒ $0 = a\cdot(-3)^2+c$ ⇒ $0 = 9a+c$

N_2: $x=3$; $y=0$ ⇒ $0 = a\cdot 3^2+c$ ⇒ $0 = 9a+c$ ← Bringt nichts Neues.

H: $x=0$; $y=12$ ⇒ $12 = a\cdot 0^2+c$ ⇒ $12 = c$

c=12 in die erste Gleichung einsetzen. ⇒ $0 = 9a+12$ ⇒ $a = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$

a und c in die Parabelgleichung einsetzen. ⇒ $\mathbf{p(x) = -\frac{4}{3}x^2+12}$

Wie breit ist die Brücke/Parabel auf halber Höhe?

Auf halber Höhe gilt für die y-Werte: $y=6$ ⇒ $p(x)=6$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3}x^2+12 = 6 \quad |-12$$
$$-\frac{4}{3}x^2 = -6 \quad |\cdot 3 \quad |:(-4)$$
$$x^2 = 4{,}5 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x = \pm 2{,}12$$

Auf einer Höhe von 6m hat die Parabel also die x-Werte: $x_1=2{,}12$ und $x_2=-2{,}12$.

Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten beträgt: $2\cdot 2{,}12=4{,}24$.

Auf halber Höhe ist die Brücke ca. 4,24m breit.

Lösung von Aufgabe 5:

Bei Absprung ist die Geschwindigkeit Null. ⇒ Für $t=0$ gilt: $v(0)=0$.

$v(0) = 0$ ⇒ $a\cdot e^{-k\cdot 0}+b = 0$ ⇒ $a\cdot 1+b = 0$ ⇒ $a=-b$.

Statt „a“ setzen wir „-b“ in die Gleichung ein und erhalten: $v(t) = -b\cdot e^{-k\cdot t}+b$.

Nach einer Sekunde liegt die Geschwindigkeit bei 35km/h.

⇒ $v(1) = 35$ ⇒ $-b\cdot e^{-k\cdot 1}+b = 35$ ⇒ $-b\cdot e^{-k}+b = 35$.

Diese Gleichung könnte man zwar nach „b“ oder nach „k“ auflösen, das wird aber recht hässlich und bringt nicht viel. Daher lassen wir sie so stehen und merken sie uns einfach für später mal.

Nach 4 Sekunden ist die Hälfte der Endgeschwindigkeit erreicht.

Was ist überhaupt die Endgeschwindigkeit? Man erhält diese, wenn t gegen Unendlich läuft. Für $t\to\infty$ gilt $v(t)\to b$, denn:

Für $t\to\infty$ gilt für die Hochzahl: $-k\cdot t\to-\infty$ und $e^{-k\cdot t}\to e^{-\infty}$. Da $e^{-\infty}$ immer gegen Null geht gilt also: Für $t\to\infty$ ⇒ $v(t) = -b\cdot e^{-k\cdot t}+b \to -b\cdot e^{-\infty}+b \to -b\cdot 0+b \to b$.

Die Endgeschwindigkeit ist also b. Die Hälfte der Endgeschwindigkeit ist ½·b.

Es gilt also $v(4)=\frac{1}{2}\cdot b$.

$$\Rightarrow -b\cdot e^{-k\cdot 4}+b = \tfrac{1}{2}\cdot b \quad |:b$$
$$-e^{-k\cdot 4}+1 = \tfrac{1}{2} \quad |-1 \quad |\cdot(-1)$$
$$e^{-4k} = \tfrac{1}{2} \quad |\ \ln(\ )$$

$-4k = \ln(½) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(½)}{-4} \approx 0{,}173$

Nun haben wir k erhalten. Dieses setzen wir in die Gleichung ein, die wir aus v(1)=35 erhielten. D.h. aus $-b\cdot e^{-k}+b = 35$ erhält man:

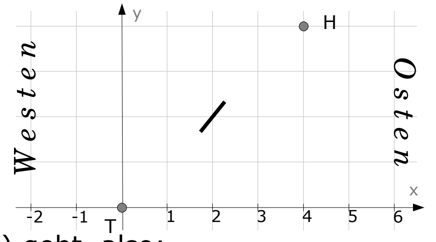
$-b\cdot e^{-0{,}173}+b = 35$ $\quad [e^{-0{,}173}\approx 0{,}841]$
$-b\cdot 0{,}841+b = 35$ $\quad$ | „b“ ausklammern
$b\cdot(-0{,}841+1) = 35$
$b\cdot 0{,}159 = 35 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{35}{0{,}159} \approx 220$

b=220 k=0,173 und a=-b=-220 in die Ausgangsgleichung einsetzen.

$\Rightarrow \quad \mathbf{v(t) = -220\cdot e^{-0{,}173\cdot t}+220}$

Welche Maximalgeschwindigkeit kann der Fallschirmspringer maximal erreichen?
Die Maximalgeschwindigkeit ist natürlich die Endgeschwindigkeit, also **220km/h**.

Lösung von Aufgabe 6:



a) Es geht um eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Unser Ansatz lautet daher:
$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.
Wir haben vier Unbekannte und brauchen daher vier Gleichungen, sprich: vier Infos.
Erste Info: Der tiefste Punkt liegt im *Ursprung*.
Das bedeutet, dass die Funktion durch O(0|0) geht, also:
$f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d=0}$.
Zweite Info: Der Ursprung ist auch der *tiefste* Punkt.
Einen Tiefpunkt berechnet man, indem man f'(x)=0 setzt.
[Der zugehörige x-Wert ist x=0, da es um den Ursprung geht.]
Wir brauchen zuerst die Ableitung: $f'(x) = 3a\cdot x^2+2b\cdot x+c$
$\Rightarrow f'(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c=0}$.
Dritte Info:
200 Meter östlich des Ursprungs beträgt die Steigung m=150%=1,5.
200 Meter entspricht x=2, eine Steigung berechnet man über f'(x).
Es gilt also $f'(2) = 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c = 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{12a+4b+c = 1{,}5}$.
Vierte Info:
Weitere 200 Meter östlich (von x=2) befindet sich der höchste Punkt.
200m östlich von x=2 entspricht x=4, einen Hochpunkt bestimmt man mit f'(x)=0. Also gilt: $f'(4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a\cdot 4^2+2b\cdot 4+c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{48a+8b+c = 0}$.
c=0 und d=0 in die dritte und vierte Gleichung einsetzen:
$\Rightarrow 12a+4b+0 = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad 12a+4b = 1{,}5 \quad |\cdot(-2)$ $\quad +$
$\Rightarrow 48a+8b+0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 48a+8b = 0$
$24a = -3 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{3}{24} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a=-\frac{1}{8}}$.

$a=-\frac{1}{8}$ in eine der Gleichungen einsetzen,
z.B. in 12a+4b=1,5 $\Rightarrow \quad 12\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+4b=1{,}5 \quad \Rightarrow \quad -1{,}5+4b=1{,}5 \quad \Rightarrow \quad 4b=3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b=\frac{3}{4}}$.
Nun haben wir die komplette Funktion, wir müssen nur die Werte von a, b, c und d in $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ einsetzen.
$f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2+0x+0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(x) = -\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2}$

b) Der höchste Punkt ist nun einfach zu berechnen.
Man kann entweder die Ableitung Null setzen und den Hochpunkt bestimmen oder man liest den Aufgabentext noch einmal, dann stellt man fest, dass der Hochpunkt bei x=4 war.
Der y-Wert beträgt $y = f(4) = -\frac{1}{8}\cdot 4^3+\frac{3}{4}\cdot 4^2 = 4$
Der höchste Punkt der Landschaft liegt 4LE hoch, entspricht **400 Höhenmeter**.

Weitere Aufgabe, in denen man Funktionen aufstellen muss, finden Sie in Kapitel A.46.05.

A.31.03 Physikaufgaben (∯)

v(t) = s'(t)
a(t) = v'(t) = s''(t)
∫a(t)dt = v(t)
∫v(t)dt = s(t)

Aus der Physik sollten Sie für die Mathematik wissen:
Die Ableitung der Strecke ist die Geschwindigkeit,
die Ableitung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung.
Umgekehrt gilt damit: Die Stammfunktion der Beschleunigung ist die Geschwindigkeit. Die Stammfunktion der Geschwindigkeit ist der Weg.
Bezeichnungen: s(t)=Strecke, v(t)=Geschwindigkeit, a(t)=Beschleunigung.

Aufgabe 7 Poetische Kugel

Es ist Sommer. Die Sonne scheint, der Himmel lacht, eine glänzende, 4kg schwere Silberkugel wird mit einer Geschwindigkeit vom $34^{m}/_{s}$ in das herrlich warme Meerwasser geschossen, dessen Wellen die Kugel sanft umfluten. Die Moleküle des Wassers kreisen tänzelnd um die Kugel, umgarnen diese wie Liebende und beschwören sie zum Bleiben, zum langsamer Werden. Die Kugel lenkt ein, lässt sich mit einer Kraft von $F(t)=-64e^{-0,5t}$ bremsen.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Beschleunigung a(t) der Kugel. Hören Sie dabei auf die zärtlich klingende Stimme der Newtonschen Bewegungsgleichung F = m·a.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Geschwindigkeit der Kugel. Achten Sie dabei auf Ihre innere Stimme. In Ihrem Geist befindet sich die Lösung. Geben Sie ihr Raum.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung für den Weg, welchen die Kugel nach dem ersten Berühren des Wassers zurück legt. Achten Sie dabei auf nicht genannte Anfangsbedingungen, die um Sie herum, in der Luft schwirren.
d) Welche Geschwindigkeit wird die Kugel in den unendlichen Tiefen des Wassers annehmen?
e) Welchen Weg wird sie nach einer Minute zurückgelegt haben?
f) Wann weicht die Geschwindigkeit nur noch um 1% von der Grenzgeschwindigkeit ab?

Lösung auf Seite 13.

Aufgabe 8 Federpendel

An einer Stahlfeder mit der Federhärte D=12,5 ($^N/_m$) hängt eine Holzfigur der Masse m=2 (kg). Die Holzfigur wird nun um 30cm ausgelenkt und schwingt hin und her, hin und her, hin und her, hin und her, hin und her, hin und her, … .
Die Bewegung lässt sich durch die folgende physikalische Schwingungsgleichung beschreiben:

$$s(t) = 30\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Hierbei gilt für ω: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

und für T: $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$.

s(t) = Strecke, um welche die Feder ausgelenkt ist (in cm)
t = Zeit (in Sekunden)
ω = Winkelgeschwindigkeit
T = Periodendauer der Schwingung (in Sekunden)

a) Bestimmen Sie ω und damit die Funktion s(t).
b) Wie stark ist die Feder nach 1,5 Sekunden ausgelenkt?
c) Zu welchen Zeitpunkten $0 < t < 2{,}5$ ist die Feder um 15 cm nach unten oder nach oben ausgelenkt?
d) Welche Geschwindigkeit hat die Feder nach 1,5 Sekunden?
e) Mit welcher Geschwindigkeit durchläuft die Feder immer wieder die Ruhelage [also bei der Auslenkung s(t)=0]?

Lösung auf Seite 14.

Aufgabe 9 Silvesterrakete

Eine Silvesterrakete steigt nach dem Start 15 Sekunden lang, bis sie explodiert. Dabei lässt sich ihre Beschleunigung annähernd durch die Formel beschreiben:

$$a(t) = \frac{0{,}8}{(2-0{,}1\cdot t)^2}$$ [a(t): Beschleunigung in m/s², t: Zeit in s].

a) Geben Sie eine Funktion an, die der Rakete die momentane Geschwindigkeit zuordnet.
Welche Geschwindigkeit hat die Rakete eine Sekunde nach dem Start?
Bei welcher Geschwindigkeit explodiert die Rakete?
b) Geben Sie eine Funktion an, die der Rakete die momentane Höhe zuordnet.
Welche Höhe hat die Rakete eine Sekunde nach dem Start erreicht?
Welche maximale Höhe erreicht die Rakete?
c) Welche Höhe hat die Rakete bei einer Geschwindigkeit von 4 m/s ?

Lösung auf Seite 16.

Aufgabe 10 Achsenbruch

Einem Autofahrer bricht auf der Autobahn unerwartet die Achse. Das Auto macht auch etwas ganz Unerwartetes: Es bremst heftig. Dieser Vorgang des Abbremsens wird durch die Funktion:

$v(t) = \frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}} - 0{,}32$ beschrieben.

(t in Sekunden ab Abbremsbeginn, v(t) in $^{\text{Meter}}/_{\text{Sekunde}}$)

a) Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge **D** und Wertemenge **W** für den Abbremsvorgang an.
b) Geben Sie eine Funktion s(t) an, welche einen Zusammenhang zwischen zurückgelegter Strecke und Zeit angibt.
c) Zu welchem Zeitpunkt $T_0 \in \mathbf{D}$ ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf 50% der Anfangsgeschwindigkeit gesunken?
d) Die Achse ist in einer Kurve gebrochen, 76,3Meter vor einem Brückenpfeiler. Kommt das Fahrzeug noch rechtzeitig zum Stehen?
e) In welcher Sekunde nimmt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs um 20% der Anfangsgeschwindigkeit ab?

Lösung auf Seite 17.

Lösung von Aufgabe 7:

a) Die erste Teilaufgabe klingt komplizierter, als sie tatsächlich ist. Da die Formel F = m·a gegeben ist, gilt $a = \frac{F}{m}$. Die Formel für F ist gegeben, m ist gegeben.

$\Rightarrow \quad a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{-64e^{-0{,}5t}}{4} = -16e^{-0{,}5t}$ $\qquad \Rightarrow$ $\mathbf{a(t) = -16 \cdot e^{-0{,}5t}}$.

b) Die Geschwindigkeit ist immer die Stammfunktion der Beschleunigung.

Also leiten wie a(t) auf. $v(t) = \int a(t)\,dt = -16e^{-0{,}5t} \cdot \frac{1}{-0{,}5} + c = +32e^{-0{,}5t} + c$.

Den Parameter c muss man noch bestimmen. Dafür verwenden wir die Anfangsbedingung v(0)=34.

$v(0)=34 \;\Rightarrow\; 32 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 0} + c = 34 \;\Rightarrow\; 32 + c = 34 \;\Rightarrow\; c = 2 \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{v(t) = 32e^{-0{,}5t} + 2}$

c) Die Strecke ist immer die Stammfunktion der Geschwindigkeit

$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 32e^{-0{,}5t} + 2\,dt = 32e^{-0{,}5t} \cdot \frac{1}{-0{,}5} + 2t + c = -64e^{-0{,}5t} + 2t + c$.

Zur Bestimmung von c: Wir brauchen ja eine Anfangsbedingung. Laut interessantem Hinweis in der Aufgabenstellung existiert ja eine Anfangsbedingung. Die ist natürlich klar: Welchen Weg hat die Kugel zum Zeitpunkt t=0 zurückgelegt? Na keinen, natürlich. Es gilt also s(0)=0.

$s(0)=0 \;\Rightarrow\; -64e^{-0{,}5 \cdot 0} + 2 \cdot 0 + c = 0 \;\Rightarrow\; -64 + 0 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = 64$

$\Rightarrow$ $\mathbf{s(t) = -64e^{-0{,}5t} + 2t + 64}$

d) Der Grenzwert der Geschwindigkeit (für $t \to \infty$) ist gefragt.

Wenn man weiß, dass $e^{-\infty} \to 0$ geht, ist das von Vorteil, dann kann man schnell sehen: $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \lim\limits_{t \to \infty} 32e^{-0{,}5t} + 2 = 32 \cdot 0 + 2 = 2$.

Die Geschwindigkeit der Kugel wird langfristig den Wert 2 annehmen.

e) Den Weg der Kugel nach einer Minute [=60 Sekunden] zu berechnen ist einfach, da wir die Weg-Funktion bereits haben. Wir setzen einfach t=60 in s(t) ein.
$s(60) = -64e^{-0,5\cdot 60}+2\cdot 60+64 = 184$ (Meter).

f) Zuerst machen wir uns Gedanken über die Abweichung von 1%.
Die Grenzgeschwindigkeit liegt bei 2, wie wir aus Teilaufgabe d) wissen.
1% davon ist $\frac{1}{100}\cdot 2 = 0{,}02$.
Eine Abweichung von 1% von der Grenzgeschwindigkeit ist also 2+0,02=2,02 oder 2–0,02=1,98.
Um den Wert 1,98 kann es nicht gehen, da die Geschwindigkeit sich nur zwischen dem Anfangswert von 34 und dem Endwert von 2 bewegt.
Es ist also gefragt, wann die Geschwindigkeit einen Wert von 2,02 annimmt.
Der Rest ist einfach. Wir müssen die Gleichung v(t)=2,02 lösen.

$32\cdot e^{-0,5t}+2 = 2{,}02 \qquad |-2$
$32\cdot e^{-0,5t} = 0{,}02 \qquad |:32$
$e^{-0,5t} = 0{,}000625 \qquad |\ \ln(\ )$
$-0{,}5t \approx -7{,}38 \qquad |:(-0{,}5)$

Nach ca. **t≈14,7** Sekunden beträgt die Abweichung 1%.

Lösung von Aufgabe 8:

a) Die Aufgabenstellung mag zwar schrecklich klingen, das ist aber auch das Einzige, was daran schrecklich ist. Sie müssen absolut keine Ahnung von Physik haben, um diese Aufgabe lösen zu können.
Betrachten Sie mal die Formel $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$. „m" und „D" ist in der Aufgabe gegeben. Man kann also „T" berechnen: $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{12{,}5}} \approx 2{,}51$.
Mit Hilfe von T können wir bereits ω berechnen: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{2\pi}{2{,}51} = 2{,}5$.
[Unsere cos-Funktion hat also eine Periodenlänge von 2,51.]
Wir haben ω, also können wir dies in die Funktion für s(t) einsetzen.
⇒ **s(t) = 30·cos(2,5·t)**

b) Die Auslenkung der Feder nach 1,5 Sekunden erhält man, indem man t=1,5 in s(t) einsetzt: $s(1{,}5) = 30\cdot\cos(2{,}5\cdot 1{,}5) \approx -24{,}6$ cm [(1)].
Negative Strecken und Auslenkungen machen im Alltag keinen Sinn, daher wäre die richtige Antwort: **Die Feder ist um 24,6cm ausgelenkt**.

c) Eine Auslenkung von 15 cm nach unten oder nach oben bedeutet:
s(t)=+15 oder s(t)=–15.
Lösungsweg 1: Sie dürfen einen GTR oder CAS verwenden:
Sie lösen einfach die Gleichungen s(t)=15 bzw. s(t)=-15 und erhalten die Ergebnisse: $t_1=0{,}42$; $t_2=2{,}09$ bzw. $t_3=0{,}84$; $t_4=1{,}68$.
Da $0<t<2{,}5$ gilt, gibt's keine weiteren Lösungen.
Lösungsweg 2: Sie dürfen eine Formelsammlung verwenden.
s(t)=+15:
$15 = 30\cdot\cos(2{,}5\cdot t) \qquad |:30$
$0{,}5 = \cos(2{,}5t)$

1 Bei sin- und cos-Funktionen muss man den Taschenrechner auf „RAD" bzw. „Bogenmaß" stellen!

[Sie suchen in der Formelsammlung, wo cos den Wert 0,5 annimmt: $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{5\pi}{3}$.]

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2{,}5t$ bzw. $\frac{5\pi}{3} = 2{,}5t$ |:2,5

$\Rightarrow t_1 \approx 0{,}42$ $\quad t_2 \approx 2{,}09$

s(t)=−15:

$-15 = 30\cdot\cos(2{,}5\cdot t)$ |:30

$-0{,}5 = \cos(2{,}5t)$

[Sie schauen in der Formelsammlung, wo cos den Wert -0,5 annimmt: $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$.]

$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 2{,}5t$ bzw. $\frac{4\pi}{3} = 2{,}5t$ |:2,5

$\Rightarrow t_3 \approx 0{,}84$ $\quad t_4 \approx 1{,}68$

Lösungsweg 3: Sie dürfen nur einen einfachen Taschenrechner verwenden.

s(t) = 15

$15 = 30\cdot\cos(2{,}5\cdot t)$ |:30

$0{,}5 = \cos(2{,}5t)$ | Substitition: 2,5t=u

$0{,}5 = \cos(u)$

$\Rightarrow u_1 = \arccos(0{,}5) \approx 1{,}05$ [1] [Theorie dazu: siehe →A.42.03]

$\Rightarrow u_2 = -u_1 = -1{,}05$

Resubstitution: $2{,}5\cdot t_1 = u_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1{,}05}{2{,}5} \approx 0{,}42$

$2{,}5\cdot t_2 = u_2 \Rightarrow t_2 = \frac{-1{,}05}{2{,}5} \approx -0{,}42$

Da $0<t<2{,}5$ gelten soll und $t_2<0$, muss zu t_2 noch eine Periode dazu gezählt werden.

$\Rightarrow t_2 = -0{,}42+2{,}51 = 2{,}09$

s(t) = -15

$-15 = 30\cdot\cos(2{,}5\cdot t)$ |:30

$-0{,}5 = \cos(2{,}5t)$ | Substitition: 2,5t=u

$-0{,}5 = \cos(u)$

$\Rightarrow u_1 = \arccos(-0{,}5) \approx 2{,}09$

$\Rightarrow u_2 = -u_1 = -2{,}09$

Resubstitution: $2{,}5\cdot t_3 = u_1 \Rightarrow t_3 = \frac{2{,}09}{2{,}5} \approx 0{,}84$

$2{,}5\cdot t_4 = u_2 \Rightarrow t_4 = \frac{-2{,}09}{2{,}5} \approx -0{,}84$

Da $0<t<2{,}5$ gelten soll und $t_4<0$, muss zu t_4 noch eine Periode dazu gezählt werden.

$\Rightarrow t_4 = -0{,}84+2{,}51 = 1{,}67$

Das Pendel ist zu den Zeitpunkten: $\mathbf{t_1=0{,}42}$ **;** $\mathbf{t_2=2{,}09}$ **;** $\mathbf{t_3=0{,}84}$ **;** $\mathbf{t_4=1{,}67}$ um 15cm ausgelenkt.

d) Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Strecke:
Also bestimmen wir die Ableitung.
$v(t) = s'(t) = 30\cdot[-\sin(2{,}5t)]\cdot 2{,}5 = -75\cdot\sin(2{,}5t)$.
Nach 1,5 Sekunden haben wir also die Geschwindigkeit von:
$\mathbf{v(1{,}5)} = -75\cdot\sin(2{,}5\cdot 1{,}5)\ \boldsymbol{\approx 48{,}87}$.

1 arccos(0,5) kennen Sie vermutlich als $\cos^{-1}(0{,}5)$.

e) Wir brauchen die Geschwindigkeit. Zwar haben wir eine Funktion für die Geschwindigkeit [v(t)], aber leider haben wir keinen Wert „t", den wir in v(t) einsetzen könnten.
Wir brauchen also zuerst die Zeit „t", bei welcher die Ruhelage durchlaufen wird [laut Aufgabenstellung gilt da s(t)=0].

$s(t) = 0$
$30\cdot\cos(2{,}5\cdot t) = 0 \qquad |:30$
$\cos(2{,}5\cdot t) = 0$

Bei ähnlicher Vorgehensweise wie in Teilaufgabe c) kommt man auf:

$2{,}5t = 1{,}57 \qquad$ bzw: $2{,}5t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\ t=\frac{1{,}57}{2{,}5} \approx 0{,}63$

t=0,63 setzen wir in v(t) ein und erhalten die Geschwindigkeit.
$v(0{,}63) = -75\cdot\sin(2{,}5\cdot 0{,}63) \approx -2{,}06.$
[Das Minuszeichen sagt in der Physik nur etwas über die *Richtung* aus, interessiert uns nicht!]
Die Ruhelage wird mit einer Geschwindigkeit von 2,06 $^{cm}/_{s}$ durchlaufen.

Lösung von Aufgabe 9:

a) Da die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit ist, ist die Geschwindigkeit die Stammfunktion der Beschleunigung.
Wir müssen a(t) also „aufleiten", um die Geschwindigkeitsfunktion zu erhalten.

$a(t) = \frac{0{,}8}{(2-0{,}1\cdot t)^2} = 0{,}8\cdot(2-0{,}1\cdot t)^{-2}$

[Jetzt Stammfunktion bilden.] $\Rightarrow\ v(t) = \frac{0{,}8}{-1}\cdot(2-0{,}1\cdot t)^{-1}\cdot\frac{1}{-0{,}1}+c = \frac{8}{2-0{,}1\cdot t}+c$

Dabei ist „c" irgendeine Konstante, die wir jetzt erst noch berechnen müssen.

Zwar wurde es nicht explizit gesagt, jedoch ist am Anfang die Geschwindigkeit der Rakete Null [sie startet ja gerade]. Es gilt also v(0) = 0.

$v(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{2-0{,}1\cdot 0}+c=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{2}+c=0 \quad\Rightarrow\quad c=-4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v(t) = \frac{8}{2-0{,}1\cdot t}-4}$

Die Geschwindigkeit 1 Sekunde nach dem Start: $v(1) = \frac{8}{2-0{,}1\cdot 1}-4 \approx$ **0,21 $^{m}/_{s}$.**

Die Geschwindigkeit bei welcher die Rakete explodiert, entspricht der Geschwindigkeit nach 15 Sekunden: $v(15) = \frac{8}{2-0{,}1\cdot 15}-4 =$ **12 $^{m}/_{s}$.**

b) Da die Geschwindigkeit die Ableitung der Höhe ist [die Höhe ist schließlich der zurückgelegte Weg], ist die Höhe die Stammfunktion der Geschwindigkeit.
Wir leiten v(t) also auf, um die Funktion der zurückgelegten Strecke [=Höhe] h(t) zu erhalten.

$v(t) = \frac{8}{2-0{,}1\cdot t}-4$

$\Rightarrow\ h(t) = 8\cdot\ln(2-0{,}1\cdot t)\cdot\frac{1}{-0{,}1}-4t+c = -80\cdot\ln(2-0{,}1\cdot t)-4t+c$

Dabei ist „c" wieder irgendeine Konstante, die wir erst noch berechnen müssen.

Um dieses „c" zu bestimmen, verwenden wir wieder die Idee, dass die Höhe der Rakete anfangs Null ist [sie startet ja gerade]. Es gilt also h(0) = 0.

$h(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -80\cdot\ln(2-0{,}1\cdot 0)-4\cdot 0+c = 0 \quad \Rightarrow \quad 80\cdot\ln(2)+c = 0 \quad \Rightarrow \quad c \approx 55{,}45$

$\Rightarrow \quad \mathbf{h(t) = -80\cdot\ln(2-0{,}1\cdot t)-4t+55{,}45}$

Die Höhe der Rakete 1 Sekunde nach dem Start:

$h(1)=-80\cdot\ln(2-0{,}1\cdot 1)-4\cdot 1+55{,}45 \approx \mathbf{0{,}1m}$.

Die maximale Höhe der Rakete wird nach 15 Sekunden erreicht [dann wenn sie explodiert]: $h(15) = -80\cdot\ln(2-0{,}1\cdot 15)-4\cdot 15+55{,}45 \approx \mathbf{50{,}9m}$.

c) Höhe der Rakete bei einer Geschwindigkeit von 4 m/s … .
Um die Höhe berechnen zu können, brauchen wir erst die Zeit.
Also berechnen wir aus v(t)=4 die benötigte Zeit „t".
Dieses „t" setzen wir dann in h(t) ein.

$v(t) = 4$

$\frac{8}{2-0{,}1\cdot t}-4 = 4 \qquad |+4$

$\frac{8}{2-0{,}1\cdot t} = 8 \qquad |\cdot(2-0{,}1t)$

$8 = 8\cdot(2-0{,}1t) \quad \Rightarrow \quad 8 = 16-0{,}8t \quad \Rightarrow \quad -8 = -0{,}8t \quad \Rightarrow \quad t = 10 \text{ (sec)}$

Nun können wir die Höhe bestimmen.
$h(10) = -80\cdot\ln(2-0{,}1\cdot 10)-4\cdot 10+55{,}45 = \mathbf{15{,}45m}$.

Lösung von Aufgabe 10:

a) Für alle, die es nicht wissen:

Die **Definitionsmenge** sind alle x-Werte, die man in eine Funktion einsetzen darf/kann, die Wertemenge sind alle y-Werte, die rauskommen können.
Aus mathematischer Sicht darf ein Nenner niemals Null werden,

$\Rightarrow \quad \sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2t+0{,}25 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t\neq -1{,}25.$

Ebenso darf unter einer Wurzel nie etwas Negatives stehen

$\Rightarrow \quad \sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2t+0{,}25 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t\geqslant -1{,}25.$

Allerdings sind beide bisherigen Ergebnisse uninteressant, denn in einer anwendungsorientierten Aufgabe machen negative Zeiten keinen Sinn [das wäre die Zeit *vor* Aufgabenbeginn]. Daher gilt schon mal: $\mathbf{t\geqslant 0}$

Das nächste Problem merken Sie vielleicht erst, wenn Sie v(t) skizzieren.
v(t) nimmt irgendwann mal negative y-Werte an. Das macht ebenfalls keinen Sinn, denn das hieße, dass das Auto mit negativer Geschwindigkeit [rückwärts] rutscht.

$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}}-0{,}32 \geqslant 0 \qquad |+0{,}32$

$\frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}} \geqslant 0{,}32 \qquad |\cdot\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3} \quad |:0{,}32$

$\frac{5}{0{,}32} \geqslant \sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3} \qquad |\ (\ )^2$

$244{,}14 \geqslant (0{,}2t+0{,}25)^3 \qquad |\ \sqrt[3]{\ }$

$6{,}25 \geqslant 0{,}2t+0{,}25 \qquad |-0{,}25 \quad |:0{,}2$

$30 \geqslant t \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D} = \{\ t \mid 0\leqslant t\leqslant 30\ \}$

Die **Wertemenge** sind alle y-Werte, die vorkommen.
Wir wissen bereits, dass t sich zwischen 0 und 30 bewegt. Es gilt demnach $v(0)=...=39{,}68$ und $v(30)=...=0$, also: $\Rightarrow \quad \mathbf{W} = \{\ v \mid 0\leqslant v\leqslant 39{,}68\ \}$

b) Die Geschwindigkeit ist immer die Ableitung des Weges, der Weg ist immer das Integral der Geschwindigkeit. Wir müssen hier also v(t) aufleiten.
[Die Integralgrenzen sind unwichtig.]

$$s(t) = \int \frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}} - 0{,}32\,dt \qquad \text{[Wurzel umschreiben: } \sqrt{(...)^3} = (...)^{\frac{3}{2}} = (...)^{1{,}5}\text{]}$$
$$= \int \frac{5}{(0{,}2t+0{,}25)^{1{,}5}} - 0{,}32\,dt \qquad \text{[Klammer hoch, in den Zähler, bringen]}$$
$$= \int 5\cdot(0{,}2t+0{,}25)^{-1{,}5} - 0{,}32\;dt \qquad \text{[integrieren]}$$
$$= \left[\frac{5}{-0{,}5}\cdot(0{,}2t+0{,}25)^{-0{,}5}\cdot\frac{1}{0{,}2} - 0{,}32t + c\right] \qquad \text{[zusammenfassen]}$$
$$= -50\cdot(0{,}2t+0{,}25)^{-0{,}5} - 0{,}32t + c \qquad \text{[umschreiben]}$$
$$= \frac{-50}{\sqrt{0{,}2t+0{,}25}} - 0{,}32t + c$$

Bestimmung von „c“:
Die Aufgabe beginnt ja mit dem Bremsvorgang. Also ist s(0) = 0.

$$0 = \frac{-50}{\sqrt{0{,}2\cdot 0+0{,}25}} - 0{,}32\cdot 0 + c \qquad \text{[zusammenrechnen]}$$
$$0 = -100 + c \quad \Rightarrow \quad c = 100 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s(t) = \frac{-50}{\sqrt{0{,}2t+0{,}25}} - 0{,}32t + 100}$$

c) Der Ausdruck „$T_0 \in \mathbf{D}$“ ist eigentlich unwichtig. Er bedeutet nur, dass wir einen bestimmten Zeitpunkt suchen, welcher T_0 genannt wird. Dass dieser Zeitpunkt innerhalb der Definitionsmenge **D** liegen muss, ist sowieso klar, denn alle Zeitpunkte [also alle x-Werte der Aufgabe] liegen innerhalb der Definitionsmenge.
50% der Anfangsgeschwindigkeit sind 50% von v(0) = $\frac{50}{100}\cdot 39{,}68$ = 19,84.
Nun müssen wir schauen, wann die Funktion v(t) den Wert 19,84 annimmt.

$$\frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}} - 0{,}32 = 19{,}84 \qquad |+0{,}32$$
$$\frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}} = 20{,}16 \qquad |\cdot\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3} \quad |:20{,}16$$
$$\frac{5}{20{,}16} \geqslant \sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3} \qquad |\ (\ )^2$$
$$0{,}062 \approx (0{,}2t+0{,}25)^3 \qquad |\ \sqrt[3]{\ }$$
$$0{,}396 \approx 0{,}2t+0{,}25 \qquad |-0{,}25 \quad |:0{,}2$$
$$0{,}73 \approx t \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T_0 \approx 0{,}72}$$

d) Wir machen das so: Wir berechnen die gesamte Strecke, die das Fahrzeug während des gesamten Bremsvorgangs zurücklegt. Nach 30 Sekunden bleibt es stehen, also berechnen wir den Weg zum Zeitpunkt t=30.
$s(30) = \frac{-50}{\sqrt{0{,}2\cdot 30+0{,}25}} - 0{,}32\cdot 30 + 100 \approx 70{,}4$ $\Rightarrow$ Er bleibt nach 70,4 Metern stehen, das ist fast 6 Meter vor dem Brückenpfeiler. **Die Strecke reicht locker.**

e) 20% der Anfangsgeschwindigkeit sind $\frac{20}{100}\cdot 39{,}68 \approx 7{,}94$. Das war nicht schwer.
Die wichtigste Idee an der Aufgabe ist es, zu kapieren, dass es um die *Abnahme* der Geschwindigkeit geht und das ist die *Ableitung* der Geschwindigkeit! Die Ableitung muss also den Wert 7,94 annehmen.
Um es genau zu nehmen, muss die Ableitung den Wert -7,94 annehmen, da es eine *Abnahme* sein soll [und keine *Zunahme*].

$$v(t) = \frac{5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^3}} - 0{,}32 = 5\cdot(0{,}2t+0{,}25)^{-1{,}5} - 0{,}32$$

$$v'(t) = 5\cdot(-1{,}5)\cdot(0{,}2t+0{,}25)^{-2{,}5}\cdot 0{,}2 = \frac{-1{,}5}{(0{,}2t+0{,}25)^{2{,}5}} = \frac{-1{,}5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^5}}$$

$$v'(t) = -7{,}94$$

$$\frac{-1{,}5}{\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^5}} = -7{,}94 \qquad |\cdot\sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^5} \quad |:(-7{,}94)$$

$$\frac{-1{,}5}{-7{,}94} = \sqrt{(0{,}2t+0{,}25)^5} \qquad |\ (\ )^2$$

$$0{,}036 \approx (0{,}2t+0{,}25)^5 \qquad |\ \sqrt[5]{\ }$$

$$0{,}514 \approx 0{,}2t+0{,}25 \qquad |-0{,}25 \quad |:0{,}2$$

$$1{,}32 \approx t$$

Nach 1,32 Sekunden, also **in der zweiten Sekunde, nimmt die Geschwindigkeit um 20% der Anfangsgeschwindigkeit ab**!

A.31.04 Schaubilder als Funktionen

Es gibt Aufgaben, in welchen Sie keinen Funktionsterm als Funktion gegeben haben, sondern nur eine Grafik, also ein Schaubild.
Was muss man bei diesem Typ von Aufgaben beachten?
Die Steigung [besser: die Tangentensteigung] des Schaubilds ist die Ableitung.
Die Fläche zwischen Funktion und x-Achse entspricht der Stammfunktion.
Welche anschauliche Bedeutung die Ableitung und die Stammfunktion haben, müssen Sie sich selber überlegen, das wird in der Aufgabe von Ihnen erwartet.

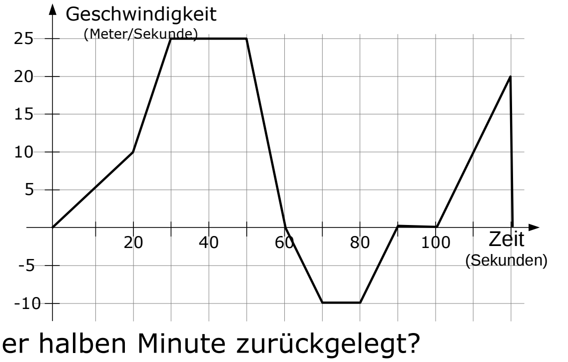
Generell gilt, wie am Anfang von Kap.A.31.01: Die Ableitung ist die Zu- oder Abnahme des Bestandes.

Steigung des Schaubilds = Ableitung

Fläche zwischen Schaubild und x-Achse = Stammfunktion

Aufgabe 11 BSE-Ochse

In der rechtsstehenden Skizze ist die Bewegung eines BSE-infizierten Ochsen für die ersten 2 Minuten eines Anfalls dargestellt.

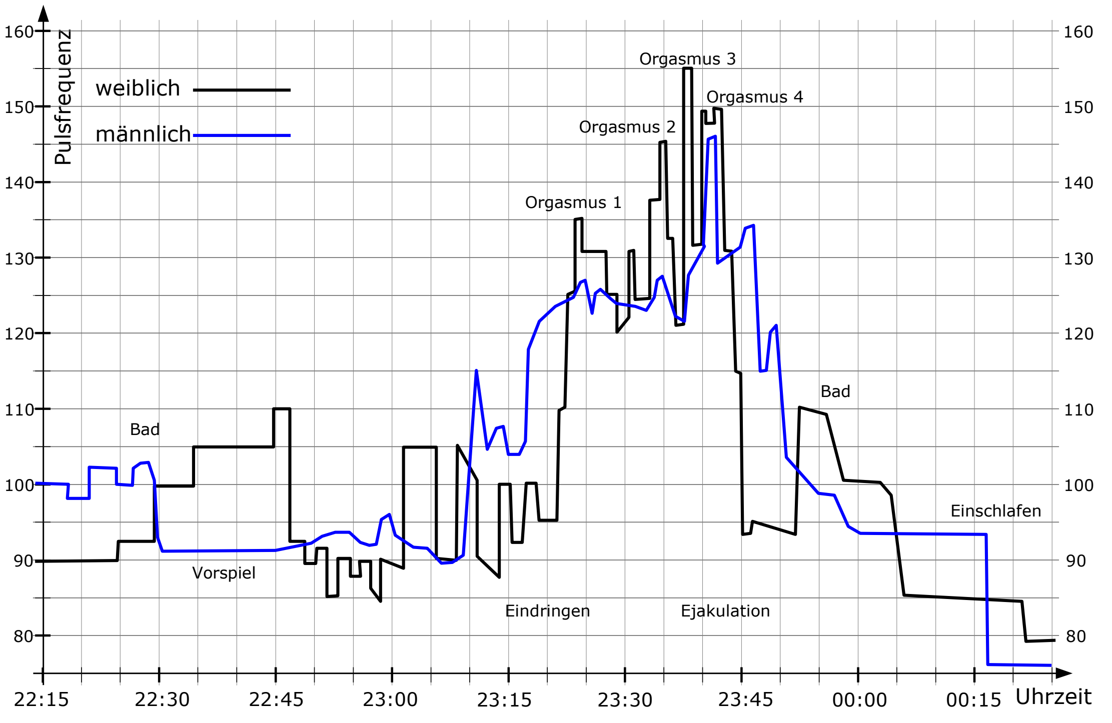


a) Interpretieren Sie die Bewegung des Ochsen hinsichtlich Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung.
b) Interpretieren Sie die Bewegung des Ochsen hinsichtlich emotionaler Beweggründe.
c) Welche Strecke hat der Ochse nach einer halben Minute zurückgelegt? Welche Strecke hat er nach 1min hinter sich?
d) Mit welcher Geschwindigkeit rennt der Ochse 35 Sekunden nach Start? Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat der Ochse in der ersten Minute?
e) Wie weit ist er nach 2min vom Ausgangspunkt entfernt?
f) Wann ist der Ochse einen halben Kilometer vom Startpunkt entfernt?

Lösung auf Seite 21.

Aufgabe 12 Orgasmenspitzen

Es heißt ja: „Sex sells".
Damit Sie diese Aufgabe also wenigstens mal anschauen, hat sie mit Sex zu tun.
Im Folgenden sehen Sie eine Grafik, die den Pulsschlag zweier Personen bei einer bestimmten sportlichen Aktivität beschreibt.



(x-Achse in Minuten, y-Achsen in Pulsschlägen je Minute.)

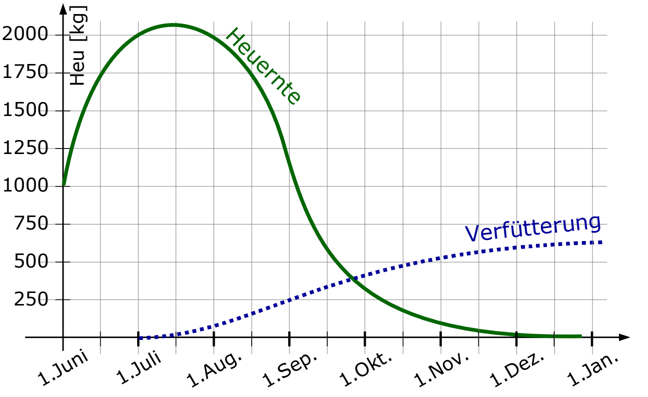
[Die Grafik gehört zu einem Versuch, der mit dem frisch erfundenen Pulsmessgerät im Jahr 1928 durchgeführt wurde. Der Versuch wurde im Buch „The Heart Rate" von den Medizinern Boas und Goldschmidt veröffentlicht. Vor lauter Freude über das neu erfundene Pulsmessgerät haben die beiden Mediziner einfach alles durchgemessen: Menschen beim Essen, beim Telefonieren, bei Turnübungen und offensichtlich auch beim Sex. Bekannt wurde die Grafik erst viel später, hauptsächlich natürlich wegen den vier Orgasmenspitzen der Probantin (die Muktiorgasmen trotz unbequemen Gummibändern und Elektroden über der Brust, die mit 30Meter langen Kabeln mit dem riesigen Aufzeichnungsgerät verbunden waren).]

a) Wie oft schlägt das weibliche Herz, wie oft das männliche Herz in der Zeit von 22:20 Uhr bis 22:50 Uhr?
b) Wie hoch ist demnach der durchschnittliche Pulsschlag der beiden Herzen in dieser Zeit?
c) Bei einem Puls von mindestens 120 sprich man von Sport. Wie lange ist das bei der Dame der Fall? Wie lange beim Herren? Wie oft das Herz beider Personen in dieser Zeit insgesamt geschlagen?
d) Bestimmen Sie alle Zeitpunkte *nach* der Ejakulation, an denen beide Herzen synchron schlagen.
e) Zu welcher Uhrzeit unterscheiden sich Pulsfrequenz der beiden Liebenden am stärksten?

Lösung auf Seite 25.

Aufgabe 13 Heusammlung

Ein Mathematiker (nennen wir ihn mal: Herr Hauser), dem sein Beruf etwas zu theoretisch ist, beschließt etwas Handfestes zu machen und wird Landwirt.
Unter anderem muss er nun auch die Heuernte einbringen, damit sein φ über den Winter was zu fressen hat. Anfang Juni befinden sich 2.000 kg Heu in seiner Scheune. Über die Heumenge, die er monatlich vom Feld in die Scheune einfährt, führt er selbstverständlich Buch und trägt das Ganze in ein Schaubild ein [siehe Grafik, durchgezogene Linie]. Noch lange vor dem Winter beginnt er, ein bisschen Heu an das φ zu verfüttern, um es an das Heu zu gewöhnen. Die Menge, die er monatlich verfüttert ist ebenfalls eingezeichnet [Grafik, gestrichelte Linie].



Die interessanten[1] Fragen:

a) Wieviel Heu bringt Herr Dr. Dipl. Math. Hauser im Juni, Juli und August insgesamt ein? [2]
b) Wieviel Heu hätte Herr Hauser Ende September in seiner Scheune, wenn er nichts verfüttern würde?
c) Wann hat sein φ 500 kg Heu gefressen?
d) Wieviel Heu befindet sich am 01. Oktober in seiner Scheune?
e) In welchem Wintermonat befinden sich 6 Tonnen Heu in der Scheune?

Lösung auf Seite 23.

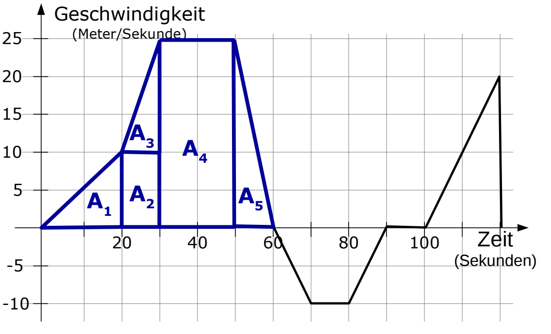
Lösung von Aufgabe 11:
In dieser Aufgabe geht es um die Geschwindigkeit. Wir werden die Idee aus Kap.A.31.03 brauchen, dass die Stammfunktion der Geschwindigkeit der Weg ist. Die Fläche zwischen der x-Achse und dem Schaubild ist daher der Weg, den unser Ochse zurücklegt.

a) Zum Zeitpunkt t=0 steht der Ochse und setzt sich gerade in Bewegung. Nach 20 Sekunden hat er eine Geschwindigkeit von 10m/s erreicht. Jetzt wird er schneller [er beschleunigt] und erreicht nach weiteren 10 Sekunden eine Geschwindigkeit von 25m/s. Bis zur 50. Sekunde hält er diese Geschwindigkeit. Von der 50. bis zur 60. Sekunde wird er langsamer [rennt aber immer noch vorwärts!!]. Nach 60 Sekunden hat er eine Geschwindigkeit von 0 erreicht.
Jetzt wechselt er die Richtung, rennt im Zeitraum von der 70. bis zur 80. Sekunde konstant mit 10m/s rückwärts. Danach verringert er seine Geschwindigkeit wieder, bis er in der 90. Sek. stehen bleibt. Er verschnauft 10 Sekunden und rennt dann wieder gleichmäßig beschleunigt vorwärts. Nach 120 Sek. hat er eine Geschwindigkeit von 20m/s erreicht. Jetzt wird seine Bewegung abrupt gestoppt. [Vielleicht von einer Wand oder von einem Zug.]

1 Ansichtssache!
2 Dr. Dipl.Math. = Diplom-Mathematiker mit Doktor-Titel.

b) Der Ochse hatte eine sehr schwere Kindheit [der Vater hat die Mutter nur kurz geschwängert und wurde danach nie wieder gesehen]. Die meiste Zeit hat er eingesperrt verbracht, ohne sich einer Schuld bewusst zu sein. Zwar waren die Tanten und Freundinnen im Stall immer sehr nett und das Leben begann mit zunehmendem Alter und sprießenden Hormonen allmählich Spaß zu machen, aber just zu der Zeit hatte er ein erneutes traumatisches Erlebnis: Den Verlust der einzigen Existenzberechtigung und des Lebenssinns eines Mannes [es handelt sich ja um einen *Ochsen* und keinen *Stier*]. Nach einer kurzen Zeit der Innehaltung und Besinnung von seiten des Ochsen kommt es dann auch zur unabweichlichen Katastrophe durch die unheilbare Krankheit und den Suizid des Ochsen.

c) Der gesamte Weg des Ochsen bis zum Zeitpunkt t=30s entspricht der Fläche, die zwischen dem Schaubild und der x-Achse im Bereich t=0 bis t=30 liegt.



[In der Skizze rechts habe ich die Fläche in zwei Dreiecke und ein Rechteck unterteilt.]

$A_1 = ½·g·h = ½·20·10 = 100$
$A_2 = a·b = 10·10 = 100$
$A_3 = ½·g·h = ½·10·15 = 75$
$\Rightarrow A_{gesamt} = 100+100+75 = 275$

In der ersten halben Minute legt der Ochse ca. 275 Meter zurück!

Der Weg der ersten Minute entspricht der Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse im Bereich t=0 bis t=60. In der ersten halben Minute sind´s 275 Meter, danach kommen noch dazu:

$A_4 = a·b = 20·25 = 500$
$A_5 = ½·g·h = ½·10·25 = 125$
$\Rightarrow A_{gesamt} = 275+500+125 = 900$

In der ersten Minute legt der Ochse ca. 900 Meter zurück!

d) Der Graph beschreibt ja die Geschwindigkeit. Im Zeitraum von t=30 bis t=50 ist die Geschwindigkeit immer gleich, immer bei 25 Meter pro Sekunde.

Nach 25 Sekunden hat der Ochse eine (gleichbleibende) Geschwindigkeit von 25 [Meter pro Sekunde]**.**

In der ersten Minute rennt der Ochse nicht immer mit der gleichen Geschwindigkeit [die Steigung ist nicht immer gleich]. Deswegen brauchen wir eine andere Idee als eben. Wir machen das sehr einfach:
Der Ochse legt ja innerhalb der ersten 60 Sekunden 900 Meter zurück [wissen wir aus der letzten Teilaufgabe]. Also beträgt die durchschnittliche Geschwindigkeit 900:60 = 15 Meter pro Sekunden.

In der ersten Minute hat der Ochse eine (durchschnittliche) Geschwindigkeit von 15 [Meter pro Sekunde]**.**

e) Für die Entfernung vom Startpunkt wäre cool zu wissen, dass der Ochse zwischen t=60 und t=90 rückwärts läuft [da die Geschwindigkeit negativ ist].
Nach einer Minute ist der Ochse 900 Meter entfernt. In der Zeit von der 60. bis zur 90. Sekunde läuft der Ochse 200 Meter rückwärts denn:

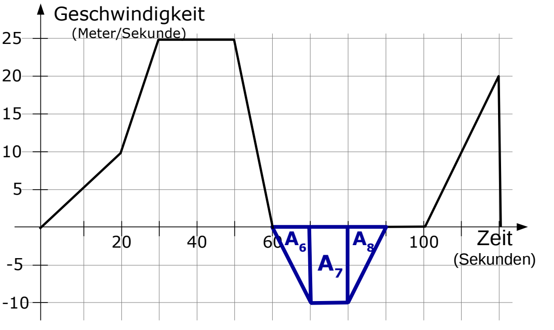
$A_6 = ½·g·h = ½·10·10 = 50$

$A_7 = a·b = 10·10 = 100$

$A_8 = ½·g·h = ½·10·10 = 50$

$\Rightarrow A_{gesamt} = 900–50–100–50 = 700$

Zwei Minuten nach Start ist der Ochse 700m vom Start entfernt.



f) Wann ein Weg von 500 Meter zurückgelegt wurde, kann man der Skizze nicht direkt entnehmen. Wir nehmen uns eine Teilfläche nach der anderen vor und schauen, wann eine gesamte Weglänge von 500 Metern überschritten wird. Dabei verwenden wir die Ergebnisse der Teilflächen aus Teilaufgabe c):

Der Weg nach 30 Sekunden:

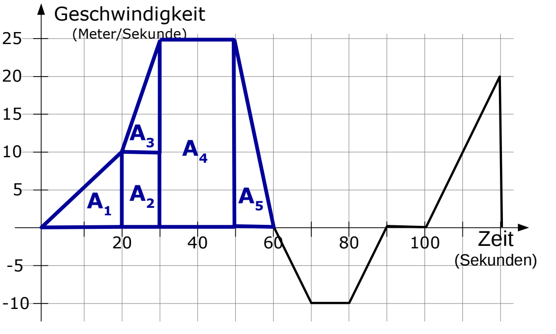
$A_1+A_2+A_3 = 275$ Meter. [Zu wenig!]

Der Weg nach 50 Sekunden: $A_1+A_2+A_3+A_4 = 775$ Meter. [Zu viel!]

Der Weg nach 40 Sekunden: $A_1+A_2+A_3+½·A_4 = 525$ Meter. [Ein bisschen zu viel!]

Man kann nun A_4 noch viel feiner zerlegen oder man schätzt ganz, ganz grob:

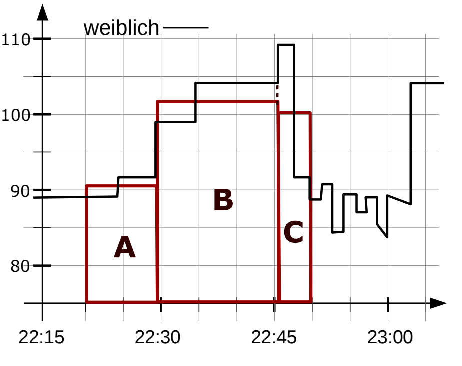
Der Ochse hat nach ca. 39 Sekunden 500 Meter zurückgelegt.



Lösung von Aufgabe 12:

[Vorab: Wir werden in der Lösung dieser Aufgabe fast alle Flächen über Rechtecke annähern und nur ein einziges Mal ein Dreieck verwenden. Das hat keinen tieferen Grund. Man könnte vermutlich auch öfter Dreiecke verwenden.]

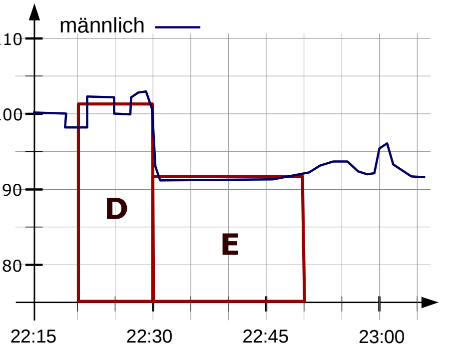
a) Die Funktion bzw. das Schaubild gibt die Schläge pro Minute an.
Die Fläche zwischen Schaubild und x-Achse gibt die Gesamtanzahl aller Herzschläge an. Wir bestimmen also die Fläche unterhalb der Funktion, indem wir diese geschickt in Rechtecke [und/oder Dreiecke] zerlegen. Anbei eine Skizze für die weibliche „Sportpartnerin“, darunter die Skizze für den männlichen „Sportpartner“.
Möglicherweise ist Ihnen aufgefallen, dass die Skala auf der y-Achse nicht mit „0“ beginnt, sondern mit „75“.



Bedenken Sie also bitte, dass die Höhe von z.B. Rechteck A den Wert „90“ hat und nicht nur „15“ oder so ähnlich.

Fläche von A = a·b ≈ 10·90 = 900.
Fläche von B = a·b ≈ 15·102 = 1530.
Fläche von C = a·b ≈ 5·100 = 500.
Gesamt: 900+1530+500 = 2930.
Das weibliche Herz schlägt in der Zeit von 22:20 bis 22:50 ca. 2.930 Mal.

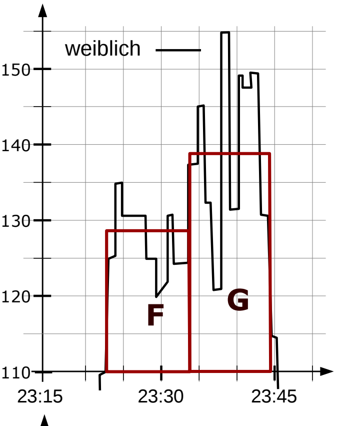
Fläche von D = a·b ≈ 10·102 = 1020.
Fläche von E = a·b ≈ 20·92 = 1840.
Gesamt: 1020+1840 = 2860.
Das männliche Herz schlägt in der Zeit von 22:20 bis 22:50 ca. 2.860 Mal.



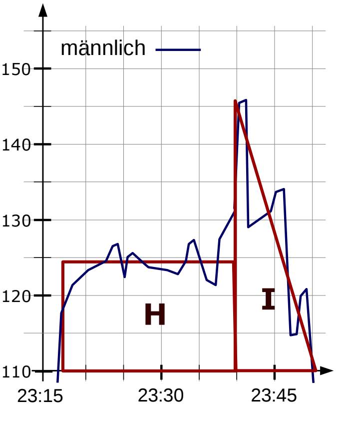
b) Die Zeit, um die es geht, sind 30 Minuten. Das weibliche Herz schlägt in der Zeit 2.930 mal. Das entspricht einem Durchschnitt von $\frac{2930}{30}$ ≈ **97,7** Herzschlägen.
Das männliche Herz schlägt in diesen 30 Minuten 2.860 mal, also hat der Herr eine durchschnittliche Pulsfrequenz von $\frac{2860}{30}$ ≈ **95,3**.

c) Im Grunde ist diese Frage, wie lange der Puls oberhalb von 120 liegt, sehr einfach. Man schaut einfach das Schaubild an.

Die sehr weibliche Dame: Ungefähr bei 23:22 Uhr überschreitet ihr Puls die [waagerechte] Linie von 120, bleibt dann dauerhaft darüber und fällt um ca. 23:44 auf unter 120. [Einmal sinkt der Puls kurz auf genau 120, aber das kann mal wohl ignorieren.] Von 23:22 bis 23:44 sind 22 Minuten. ⇒ **Der Puls der Dame liegt 22 Minuten lang über 120**.



Der extrem männliche Herr: Ungefähr bei 23:18 überschreitet sein Puls die Linie von 120, bleibt dann dauerhaft darüber und fällt um ca. 23:48 auf unter 120.[Später einmal steigt der Puls kurz auf über 120, aber das kann mal wohl ignorieren.] Von 23:18 bis 23:48 sind 30 Minuten. ⇒ **Der Puls des Herren liegt 30 Minuten lang über 120.**



Wie oft haben die beiden Herzen geschlagen?
Ähnlich wie in Teilaufgabe a) brauchen die Flächen zwischen der x-Achse und den Schaubildern.

Das weibliche Herz:
Man könnte die Fläche grob durch zwei Rechtecke annähern [es gibt noch 100 andere Varianten].
Fläche von F = a·b ≈ 11·128 = 1408.
Fläche von G = a·b ≈ 11·138 = 1518.
Gesamt: 1408+1518 = 2926.
⇒ **Das weibliche Herz schlägt in dieser Zeit ca. 2.930 mal.**

Das männliche Herz:

Man könnte die Fläche grob durch ein Rechteck und ein Dreick annähern.
Fläche von H = a·b ≈ 22·124 = 2728
Fläche von I = ½·g·h ≈ ½·10·145 = 725
Gesamt: 2728+725 = 3553
⇒ **Das männliche Herz schlägt in dieser Zeit ca. 3.550 Mal.**

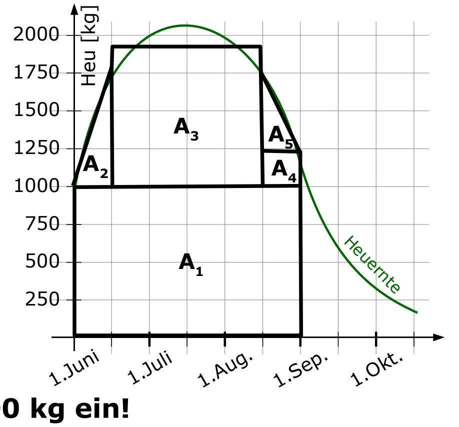
d) Die Herzen schlagen „*synchron*" wenn die Pulsfrequenz beider Herzen gleich ist. Wir müssen also die Schnittpunkte beider Kurven suchen.
Wenn Sie das bisher verstanden haben, ist der Rest einfach:
Wir suchen in der Grafik alle Schnittpunkte der beiden Kurven [laut Aufgabenstellung *nach* der Ejakulation]. Die Schnittpunkte liest man ab bei:
t_1≈23:43 ; t_2≈23:52 ; t_3≈00:05 und t_4≈00:17.

e) Der größte Unterschied in den Herzfrequenzen … .
Wir müssen wissen, an welchen Stellen der [senkrecht gemessene] Unterschied zwischen den Schaubilder am größten ist. Das macht man wieder einfach, nur durch Anschauen der beiden Schaubilder [evtl. unter Zuhilfenahme eines Lineals]. Einen großen Unterschied stellt man bei ca. 23:21 Uhr fest, ein anderer großer Unterschied ist bei ca. 23:46 Uhr. Allerdings ist der Unterschied zwischen beiden Schaubildern um 23:46 Uhr ein bisschen größer als der um 23:21 Uhr.
Um ca. 23:46 Uhr ist der Unterschied zwischen den beiden Pulsfrequenzen am größten.

Lösung von Aufgabe 13:
[Für den Fall, dass jemand den Witz mit dem „φ" noch nicht kapiert haben sollte, möchte ich mich entschuldigen und den Witz erklären: „φ" ist das griechische „Fi" und sollte hier „Vieh" bedeuten.]
Vorbereitung für die Aufgabe:
Laut Aufgabenstellung ist durch die gegebene Kurve nicht die Menge des Heus, sondern die *Zunahme des Heubestands* in der Scheune gegeben [das ist das Heu, das der Landwirt monatlich einbringt].
Insofern ist unsere Kurve die Änderung der vorhandenen Heumenge und damit die *Ableitung der gesamten Heumenge*, die sich in der Scheune befindet.

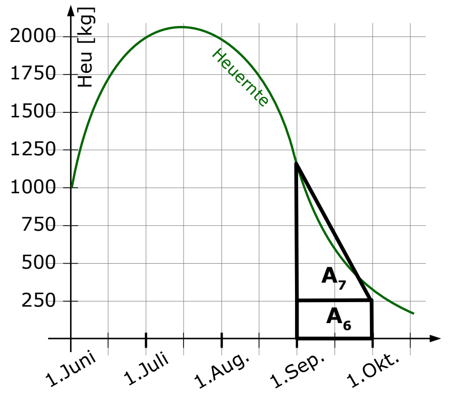
Die gesamte Heumenge erhält man also, indem man einen Schätzwert für die Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse bestimmt [zuzüglich dem Anfangswert von 2.000kg].

a) Wir zerlegen die Fläche zwischen 1.Juni und 31. August in Dreiecke und Rechtecke.
[Interessant ist evtl. A_3, dessen oberen Rand wir vereinfachend so gewählt haben, dass wir von der tatsächlichen Fläche ca. so viel weg geschnitten haben, wie wir dazu gewählt haben].



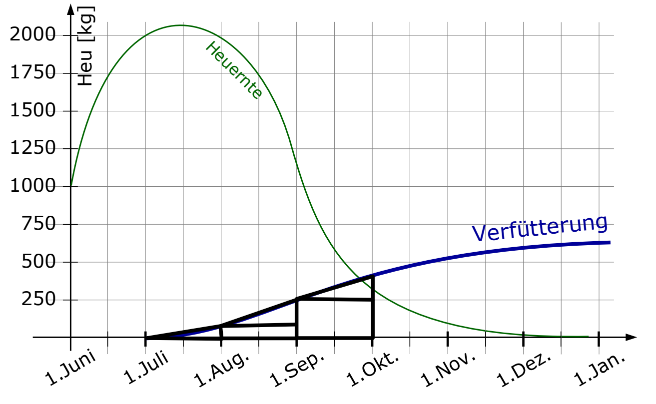
A_1 = a·b ≈ 3·1000 = 3000
A_2 = ½·g·h ≈ ½·0,5·750 = 175
A_3 = a·b ≈ 2·900 = 1800
A_4 = a·b ≈ 0,5·250 = 125
A_5 = ½·g·h ≈ ½·0,5·500 = 125
A_{gesamt} = 3000+175+1800+125+125 = 5225
Herr Hauser bringt also (gerundet) ca. 5.200 kg ein!

b) Anfangs [1.Juni] hat Herr Hauser 2.000 kg in seiner Scheune.
Bis Ende August bringt er noch 5.200 kg dazu [letzte Frage], also hat er da 7.200 kg.
Wieviel er im Laufe des Septembers einbringt, müssen wir wieder über Flächen abschätzen.
$A_6 = a \cdot b \approx 1 \cdot 250 = 250$
$A_7 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 900 = 450$
Gesamte Heumenge: 7200+250+450=7900.
Herr Hauser hat Ende September ca. 7.900 kg Heu in seiner Scheune.
[Das Heu, welches er verfüttert, dürfen wir ja schließlich ignorieren.]



c) Diesmal geht es um die Kurve mit der Verfütterung, denn es ist gefragt, wieviel Heu das φ frisst. Wir malen wieder Dreiecke und Rechtecke, weil das so unglaublich lustig ist.
1.Juli–1.Aug.: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 = 50$
1.Aug.–1.Sep.: $A_{Rechteck} = a \cdot b \approx 1 \cdot 100 = 100$; $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 150 = 75$
Bis Ende Sep. hat das φ also 50+100+75 = 225kg Heu gefressen.
1.Sep.–1.Okt.:
$A_{Rechteck} = a \cdot b \approx 1 \cdot 250 = 250$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 150 = 75$
Bis Ende Okt. hat das φ 225+250+75=550kg Heu gefressen.

Der gesuchte Zeitpunkt muss knapp vor dem 1.Oktober liegen. Wir schätzen also ganz grob: **Am 24. September** um 13Uhr, 23 Minuten und 37 Sekunden.(1)



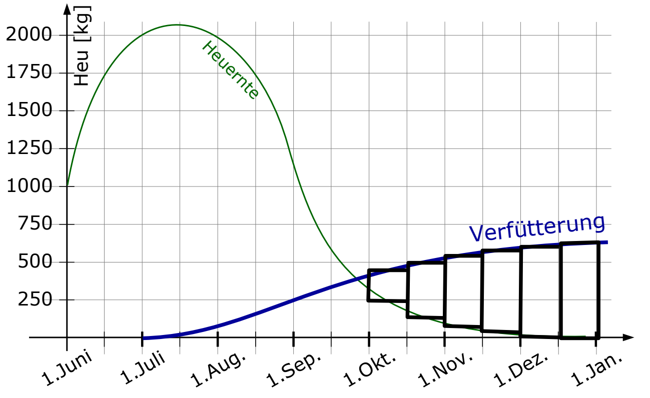
d) Wir wissen aus Teilaufgabe b), dass Herr Hauser am 01.Okt. ca. 7900kg Heu in seiner Scheune rumliegen hat.
Aus Aufgabenstellung c) wissen wir, dass das φ bis zum 01.Okt. ca 550kg Heu gefressen hat. Also befinden sich in der Scheune: 7900–550=7350kg Heu.
Herr Hauser hat am 01.Okt ca. 7350kg Heu in seiner Scheune.

1 Ist ein kleiner Scherz. So eine Schätzung kann große Abweichungen mit sich bringen. Würde man z.B. auf 20.Sep. oder 28.Sep. statt auf 24.Sep. tippen, wäre das auch kein Beinbruch.

e) Am 01.Okt. hat Herr Hauser 7.350kg Heu in der Scheune.

Ab dem 01.Okt. tasten wir uns nun an den richtigen Zeitpunkt heran, indem wir in der Zeichnung immer senkrechte „Streifen“ von einen halben Monat betrachten [also eine Breite von einem Kästchen] und diese Fläche durch Rechteckflächen abschätzen.

Um es genau zu nehmen, betrachen wir die Fläche zwischen den beiden Schaubildern, denn so viel mehr verfüttert der Bauer als dass er einbringt [die Differenz].



01.Okt.–15.Okt.: A = a·b ≈ 0,5·200 = 100
Am 15.Okt. sind 7350–100 = 7250 kg Heu in der Scheune.
15.Okt.–01.Nov.: A = a·b ≈ 0,5·300 = 150
Am 01.Nov. sind 7250–150 = 7100 kg Heu in der Scheune.
01.Nov.–15.Nov.: A = a·b ≈ 0,5·500 = 250
Am 15.Nov. sind 7100–250 = 6850 kg Heu in der Scheune.
15.Nov.–01.Dez.: A = a·b ≈ 0,5·550 = 275
Am 01.Dez. sind 6850–275 = 6575 kg Heu in der Scheune.
01.Dez.–15.Dez.: A = a·b ≈ 0,5·600 = 300
Am 15.Nov. sind 6575–300 = 6275 kg Heu in der Scheune.
15.Dez.–01.Jan.: A = a·b ≈ 0,5·650 = 325
Am 01.Jan. sind 6275–325 = 5950 kg Heu in der Scheune.

Irgendwann, Ende Dezember, sind 6.000 kg Heu in der Scheune.