

*Von diesem Kapitel existiert bisher leider nur eine veraltete Version.
Wir bitten um Entschuldigung, wir überarbeiten es schnellstmöglich.*

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht
aus dem Internet herunter geladen werden können.

Dazu gehören:

Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie
die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen
Erklärungen des Buches hin- und her springen.

Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

mathe seite

Die gute Seite an Mathe.

Kap 10 Logarithmus-Funktionen

Es ist als Mathematiker immer wieder interessant und witzig zu beobachten, wie stark Logarithmus-Funktionen „normale“ Leute in Schweißausbrüche und Panikattacken treiben können. Drum machen wir eine kleine Pause, damit Euer Herzrasen (vom Lesen der Überschrift) etwas abflauen kann.

-PAUSE-

Kap.10a) (nonverbale) Argumente und Nullstellen

Wir werden (wie bei trigonometrischen Funktionen) häufig den Begriff **Argument** verwenden:

Das Argument vom ln ist derjenige Term, auf den sich der ln bezieht.

z.Bsp. „2x“ ist das Argument von $\ln(2x)$

„4-x“ ist das Argument von $3x \cdot \ln(4-x)$

Gut, dass wir darüber geredet haben.

Nullstellen:

Möglicherweise geschehen noch Zeichen und Wunder und Ihr wisst noch, wie man Logarithmen-Terme Null setzt. Allerdings befürchte ich eher das Gegenteil. Daher nochmal kurz:

$\ln \square$ ist die abkürzende Schreibweise von $\log_e \square$.

Insofern gilt: **$\ln(e^{\text{Zeuch}}) = \text{Zeuch}$ und $e^{\ln(\text{Zeuch})} = \text{Zeuch}$**

Es gilt also auch: $\ln(e^x) = x$ oder $\ln(e^{2x+5}) = 2x+5$ oder $\ln(e^{-1-2t}) = -1-2t$ (1)

Es gilt also auch: $e^{\ln(x)} = x$ oder $e^{\ln(2x+5)} = 2x+5$ oder $e^{\ln(1-2t)} = 1-2t$ (2)

Bsp.1) Nullstelle von $f(x) = 4 + 2 \cdot \ln(x+3)$ berechnen.

$4 + 2 \cdot \ln(x+3) = 0$	-4	erstmal nach dem $\ln(\)$ - Term auflösen
$2 \cdot \ln(x+3) = -4$:2	
$\ln(x+3) = -2$	$e^{(\)}$	e hoch die ganze Gleichung
$e^{\ln(x+3)} = e^{-2}$		links fällt „e“ mit dem „ln“ weg.
$x+3 = e^{-2}$	-3	
$x = e^{-2} - 3$		eintippen
$x \approx -2,86$		

Bsp.2)

$3 \cdot \ln(2-0,5x) - 1 = 5$	+1	wieder zuerst nach dem $\ln(\)$ - Term auflösen
-------------------------------	----	--

- 1 Das geht aber nicht, wenn vor dem e-Term noch was steht. Z.Bsp. kann man bei $\ln(2e^x)$ nicht „e“ und „ln“ wegfällen lassen und „2x“ oder so was Ähnliches erhalten. Auch $\ln(3+e^x)$ kann man nicht mehr vereinfachen.
- 2 Auch dieses geht nicht, wenn vor dem ln-Term noch was steht. Z.Bsp. kann man bei $e^{2\ln(x)}$ wiederum „e“ und „ln“ nicht wegfällen lassen und „x“ oder was ähnliches daraus machen. Auch $e^{3+\ln(x)}$ ist nicht „3+x“ oder `was ähnliches.

$$\begin{array}{lll}
 3 \cdot \ln(2-0,5x) = 6 & | :3 & \\
 \ln(2-0,5x) = 2 & | e^{(\cdot)} & \text{e hoch die ganze Gleichung} \\
 e^{\ln(2-0,5x)} = e^2 & & \text{links fällt „e“ mit dem „ln“ weg.} \\
 2-0,5x = e^2 & | -2 & \\
 -0,5x = e^2 - 2 & | :(-0,5) & \\
 x = \frac{e^2-2}{-0,5} \approx -2,86 & & \text{wir freuen uns.}
 \end{array}$$

Kap.09b) Logarithmenregeln und häufig gemachte Fehler

Logarithmenregeln:

Es gibt eigentlich nur zwei wichtige Logarithmenregeln:

$$1) \quad \ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B)$$

genauso gilt auch:

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$2) \quad \ln(A^n) = n \cdot \ln(A)$$

z.Bsp.

- 1) „ $\ln(2x)$ “ kann man als „ $\ln(2)+\ln(x)$ “ schreiben.
- 2) „ $\ln(x^5)$ “ kann man als „ $5 \cdot \ln(x)$ “ schreiben.
- 3) $\ln(4e^{2t}) = \ln(4) + \ln(e^{2t}) = \ln(4) + 2t \cdot \ln(e) = \ln(4) + 2t$

häufig gemachte Fehler:

$\ln(x)$ heißt nicht $\ln \cdot (x)$.

Man kann $\frac{\ln(x)}{x}$ **nicht** zu $\frac{\ln(\cancel{x})}{\cancel{x}} = \ln$ kürzen ($\frac{\ln(x)}{x}$ lässt sich nicht weiter vereinfachen)

ebenso gibt „ $\ln(x) \cdot 2x$ “ **nicht** „ $\ln(2x^2)$ “ (lässt sich auch nicht weiter vereinfachen)

„ $\ln(3x+4)$ “ gibt **nicht** „ $\ln(3x)+\ln(4)$ “ (Bei Strichrechnung im Argument lässt sich nichts weiter vereinfachen)

„ $\ln(3 \cdot x)$ “ gibt **nicht** „ $\ln(3) \cdot \ln(x)$ “

Kap.10c) Ableitungen

In-Terme leitet man eigentlich mit der Kettenregel ab. (Allerdings gibt's immer das gleiche Schema):

Das Argument vom ln kommt in den Nenner, die Ableitung von diesem Argument kommt nach

oben, in den Zähler. (Der In-Term verschwindet).

Beispiele:

$f(x)$	Argument vom In	Ableitung vom Argument	$f'(x)$
$3 \cdot \ln(2x+7)$	$2x+7$	2	$3 \cdot \frac{2}{2x+7}$
$2 \cdot \ln(1-tx)$	$1-tx$	-t	$2 \cdot \frac{-t}{1-tx}$
$12 + \ln(x^2-2)$	x^2-2	2x	$\frac{2x}{x^2-2}$
$4 + 2 \cdot \ln(tx^3)$	tx^3	$3tx^2$	$2 \cdot \frac{3tx^2}{tx^3} = \frac{6}{x}$

Ein bissl komplizierter wird's natürlich, wenn nicht nur ein In-Term da steht, sondern noch die Produkt- oder Quotienten- oder Kettenregel ins Spiel kommt.

Bsp.3) (Produktregel)

$$f(x) = 3x \cdot \ln(2x+7)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \ln(2x+7) + 3x \cdot \frac{2}{2x+7}$$

$$u=3x \quad v = \ln(2x+7)$$

$$u'=3 \quad v' = \frac{2}{2x+7}$$

Bsp.4) (Produktregel)

$$f(x) = (2x-1) \cdot \ln(tx^2)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(tx^2) + (2x-1) \cdot \frac{2}{x}$$

$$u=2x-1 \quad v = \ln(tx^2)$$

$$u'=2 \quad v' = \frac{2tx}{tx^2} = \frac{2}{x}$$

Bsp.5) (Quotientenregel)

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot (x-1) - \ln(x^2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln(x^2)}{(x-1)^2} =$$

$$= \left(\frac{x-1}{x} - \ln(x^2) \right) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x \cdot (x-1)} - \frac{\ln(x^2)}{(x-1)^2}$$

$$u=\ln(x^2) \quad v = x-1$$

$$u' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \quad v' = 1$$

Bsp.6) (Kettenregel)

$$f(x) = \ln(e^{tx}+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{tx}+2} \cdot e^{tx} \cdot t = \frac{te^{tx}}{e^{tx}+2}$$

Kap.10d) senkrechte Asymptoten, Definitionsmenge

Wenn Ihr an Wurzeln denkt, wisst Ihr möglicherweise noch, dass unter einer Wurzel nichts

Negatives stehen darf. Für die x-Werte, bei denen unter der Wurzel doch `was Negatives `rauskommt, gibt es keine Lösung. So ähnlich ist es auch beim ln. Im Argument vom ln darf nichts Negatives stehen (auch nicht Null).

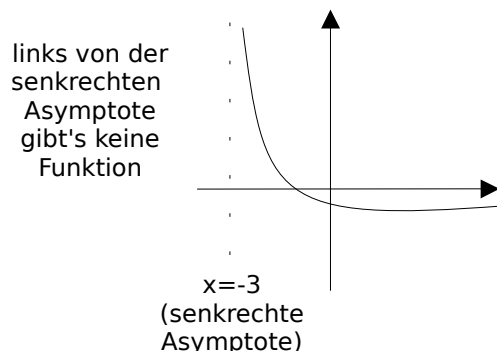
Bei den x-Werten, bei denen das Argument genau Null ist, gibt's eine **senkrechte Asymptote**.

Bsp.7) $f(x) = 3 \cdot \ln(2x+6)$

Definitionsmenge: $2x+6 > 0 \Rightarrow x > -3$
 senkr. Asymptote: $2x+6 = 0 \Rightarrow x = -3$

$D = \{ x \mid x > -3 \}$
 senkr. Asymptote bei $x = -3$

Die Funktion sieht also so aus:
 Links von $x=-3$ gibt's keine Funktion (x muss ja größer als -3 sein). Bei $x=-3$ schmiegt sich die Funktion irgendwie an die senkrechte Gerade $x=-3$ an. (Geht da ins Unendliche hoch oder runter). Irgendwie so könnte die Funktion verlaufen. (Ohne Kurvendiskussion wissen wir natürlich nicht genau wie. Es geht uns ja auch hauptsächlich nur um die senkrechte Asymptote)

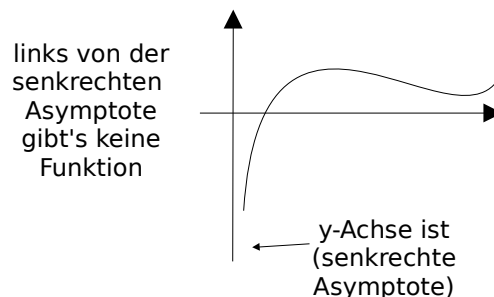


Bsp.8) $f(x) = -e^{x+1} + x \cdot \ln(tx)$

Definitionsmenge: $tx > 0 \Rightarrow x > 0$
 senkr. Asymptote: $tx = 0 \Rightarrow x = 0$

$D = \{ x \mid x > 0 \}$
 senkr. Asymptote bei $x = 0$

Die Funktion könnte also so aussehen:
 Links von $x=0$ gibt's keine Funktion (x muss ja größer als 0 sein). Bei $x=0$ schmiegt sich die Funktion irgendwie an die senkrechte Gerade $x=0$ an. (Geht da ins Unendliche hoch oder runter). Durch die ausführliche Kurvendiskussion wird sich zeigen, dass die Funktion überhaupt *keine* senkrechte Asymptote hat, das kann man jetzt jedoch noch nicht wissen.

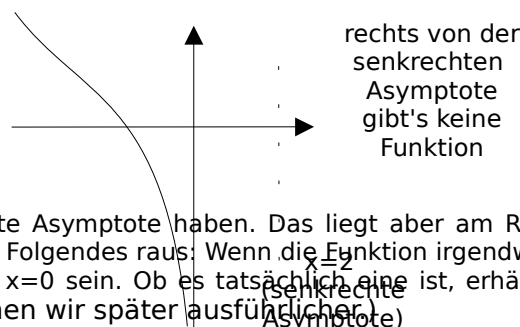


Bsp.9) $f(x) = 0,2 \cdot \ln(e^{2-x}-1)$

Definitionsmenge: $e^{2-x}-1 > 0 \Rightarrow e^{2-x} > 1 \Rightarrow 2-x > 0 \text{ (4)} \Rightarrow 2 > x$
 senkr. Asymptote: $e^{2-x}-1 = 0 \Rightarrow e^{2-x} = 1 \Rightarrow 2-x = 0 \text{ (4)} \Rightarrow 2 = x$

$D = \{ x \mid x < 2 \}$
 senkr. Asymptote bei $x = 2$

Die Funktion könnte also so aussehen:
 Diesmal gibt's rechts von der senkrechten Asymptote keine Funktion (x muss ja kleiner als 2 sein). Bei $x=2$ schmiegt sich die Funktion irgendwie an die senkrechte Gerade $x=2$ an. (Geht da ins Unendliche hoch oder runter).



3 Streng genommen wird diese Funktion bei $x=0$ *keine* senkrechte Asymptote haben. Das liegt aber am Rest der Funktion (hauptsächlich am „x“ vor dem ln). Wir kriegen also nur Folgendes raus: Wenn die Funktion irgendwo eine senkrechte Asymptote hat, dann kann diese Asymptote nur bei $x=0$ sein. Ob es tatsächlich eine ist, erhält man, indem man das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ betrachtet. (Machen wir später ausführlicher.)

4 $\ln(1) = 0$

Irgendwie so könnte die Funktion verlaufen. (Ohne Kurvendiskussion wissen wir natürlich wieder nicht genau wie. Es ist erstmal eine grobe Orientierung.)

Also egal, wie die Funktion auch aussehen mag, es interessiert nur das Argument. Auch bei $h(x) = (2x^2+5x-3\sin(x)) \cdot \ln(3+2x)$ ist nur „3+2x“ interessant. Der Rest mag zwar wild sein, ist aber für senkrechte Asymptote und Definitionsmenge unwichtig.

Kap.10e) Asymptoten

Weiter oben haben wir ein bisschen über senkrechte Asymptoten bei ln-Termen philosophiert. Davon brauchen wir jetzt nicht mehr viel. Das kriegen wir mit der folgenden Verfahrensweise automatisch raus.

Normalerweise geht man Asymptoten ja so an, dass man entweder den Nenner=0 setzt, (falls ein Nenner überhaupt vorhanden ist,) oder man lässt x gegen $\pm\infty$ laufen und schaut gegen was f(x) geht.

(Falls man eine komplizierte ln-Funktion mit einem Nenner hat, setzt man diese natürlich auch Null, aber ich denke das kriegt Ihr hin. Im Moment interessiert mich eher das mit dem $x \rightarrow \pm\infty$)

Bei ln-Funktionen gibt es nun mal das Problem, dass gar nicht alle x-Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zugelassen sind, weil die Definitionsmenge nicht so groß ist.

Da lässt man dann x einfach gegen die Grenzen der Definitionsmenge gehen. (Wenn also wie in Bsp.7) die Definitionsmenge auf $x > -3$ eingeschränkt ist, lässt man einmal $x \rightarrow +\infty$ gehen, und einmal $x \rightarrow -3$ gehen.)

Nun sollte man wissen, dass $\ln(x)$ gegen $-\infty$ geht, wenn x gegen Null läuft
und

dass $\ln(x)$ gegen $+\infty$ geht, wenn x gegen $+\infty$ geht.
In den beiden Fällen $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ ist jeder ln-Term immer schwächer als alle anderen Terme.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ existiert nicht}$$

Bsp.10) $f(x) = 3 \cdot \ln(2x+6)$

(vergleiche Bsp.7))

Definitionsmenge: $2x+6 > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x > -3$

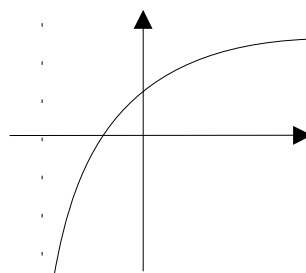
Asymptoten: x einmal gegen $+\infty$ gehen lassen, dann gegen -3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \ln(2x+6) = +\infty$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\rightarrow +\infty}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\rightarrow +\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} 3 \cdot \ln(2x+6) = -\infty$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\rightarrow 0}$



So sieht unsere Funktion nun also aus.

Links (bei $x = -3$) geht sie runter ($y \rightarrow -\infty$), rechts (bei $x \rightarrow +\infty$) geht sie hoch. ($y \rightarrow +\infty$)

→∞

Bsp.11) für $t>0$ sei: $f(x) = -e^{x+1} + x \cdot \ln(tx)$

(vergleiche Bsp.8)

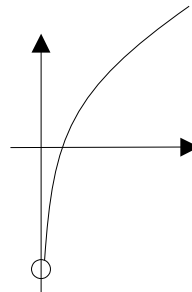
Definitionsmenge: $tx>0 \Rightarrow x>0$

Asymptoten: x einmal gegen $+\infty$ gehen lassen, dann gegen 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{-e^{x+1}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\ln(tx)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{-e^{x+1}}_{\rightarrow -e^1} + \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\ln(tx)}_{\rightarrow -\infty} = -e^1 + 0 = -2,7$$

→0 (ln verliert)



Links (bei $x=0$) geht die Funktion zu $y=-e^1=-2,7$. Allerdings geht sie nur ran (x geht nur *gegen* Null, genau Null ist nicht in **D**). Die Funktion geht also gegen den Punkt $(0|-2,7)$.

Rechts geht die Funktion hoch, ins Unendliche ($y \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$).

Bsp.12) $f(x) = 0,2 \cdot \ln(e^{2-x}-1)$

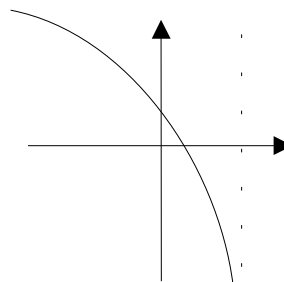
(vergleiche Bsp.9)

Definitionsmenge: $e^{2-x}-1 > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow 2-x > \ln(1) \Rightarrow \dots \Rightarrow x < 2$

Asymptoten: x einmal gegen $-\infty$ gehen lassen, dann gegen 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{0,2 \cdot \ln(e^{2-x}-1)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{0,2 \cdot \ln(e^{2-x}-1)}_{\rightarrow -\infty} = -\infty$$



So sieht unsere Funktion nun also aus.

Links (bei $x \rightarrow -\infty$) geht sie hoch ($y \rightarrow +\infty$), rechts (bei $x \rightarrow 2$) geht sie runter. ($y \rightarrow -\infty$)

Kap.10f) erste große Beispielsaufgabe

Es sei $f(x) = 2x \cdot \ln(0,5x)$

-Kurvendiskussion und Zeichnung.

-Bestimmen Sie die Fläche, die $f(x)$ mit der x -Achse einschließt.

Definitionsmenge:

$$0,5x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$x > 0$ }

$D = \{ x \mid$

Asymptoten:

für $x \rightarrow +\infty$ geht $f(x) \rightarrow 2 \cdot \infty \cdot \ln(0,5 \cdot \infty) = \infty \cdot \infty = \infty$
 für $x \rightarrow 0$ geht $f(x) \rightarrow 2 \cdot 0 \cdot \ln(0,5 \cdot 0) = 0 \cdot (-\infty) = 0$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \ln(0,5x) = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \ln(0,5x) = 0$$

Symmetrie:

Schon allein, weil die Definitionsmenge nicht symmetrisch ist (es gibt sie nur rechts von der x-Achse), kann die Funktion ganz sicher *nicht* symmetrisch sein.

Ableitungen:

$$f(x) = 2x \cdot \ln(0,5x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \ln(0,5x) + 2x \cdot \frac{1}{0,5x} \cdot 0,5 = 2 \cdot \ln(0,5x) + 2$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{0,5} \cdot \frac{1}{0,5} = \frac{2}{x} \quad (= 2 \cdot x^{-1})$$

$$f'''(x) = -2 \cdot x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$$

Nullstellen:

$$\begin{array}{l}
 f(x) = 0 \\
 2x \cdot \ln(0,5x) = 0 \\
 \begin{array}{l}
 \swarrow \\
 x_1 = 0 \\
 \searrow \\
 \ln(0,5x) = 0 \\
 0,5x = e^0 \\
 x_2 = 2
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 | e^{(\cdot)} \\
 | : 0,5
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 N_1(0 | 0) \notin D \\
 N_2(2 | 0)
 \end{array}$$

Extremstellen:

$$\begin{array}{l}
 f'(x) = 0 \\
 2 \cdot \ln(0,5x) + 2 = 0 \\
 \ln(0,5x) = -1 \\
 0,5x = e^{-1} \\
 x = 2e^{-1} \approx 0,74
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 | -2 \quad | : 2 \\
 | e^{(\cdot)} \\
 | : 0,5
 \end{array}$$

x-Wert in f''(x) einsetzen (kucken ob Hoch- oder Tiefpunkt) und in f(x) (für y-Wert)

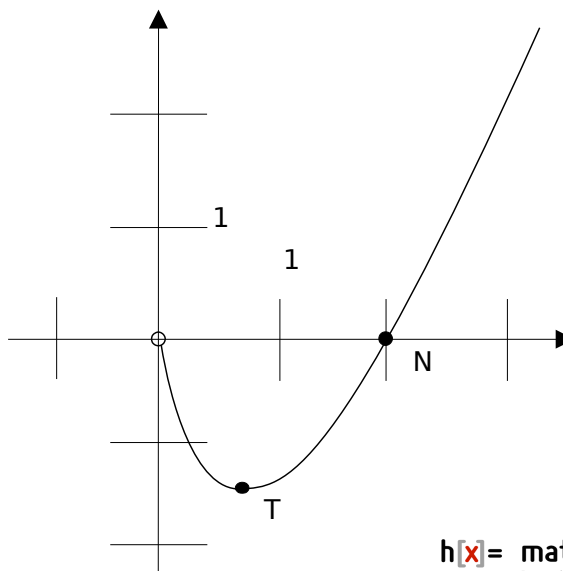
$$f''(2e^{-1}) = \frac{2}{2 \cdot e^{-1}} = \frac{1}{e^{-1}} = e^{+1} > 0 \Rightarrow T(2e^{-1} | ?)$$

$$f(2 \cdot e^{-1}) = 2 \cdot 2e^{-1} \cdot \ln(0,5 \cdot 2e^{-1}) = 4e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = 4e^{-1} \cdot (-1) = -4e^{-1} \approx -1,47 \Rightarrow T(2e^{-1} | -4e^{-1})$$

Wendepunkte:

$$\begin{array}{l}
 f'''(x) = 0 \\
 \frac{2}{x} = 0 \quad | \cdot x \\
 2 = 0 \\
 \Rightarrow \text{keine Wändäställän}
 \end{array}$$

Zeichnung:



Fläche, die f(x) mit der x-Achse einschließt.

Die Grenzen der Fläche: Links wird die Fläche von $x=0$ begrenzt, rechts von $x=2$.

Nun gibt es natürlich das Problem, dass $x=0$ gar nicht zur Definitionsmenge gehört. Daher müssen wir als linke Grenze $x=u$ wählen und u anschließend gegen Null streben lassen.

Für das Integral von $f(x)$ brauchen wir die Produktintegration⁽⁵⁾, da $f(x)$ aus zwei Faktoren besteht („ $2x$ “ und „ $\ln(0,5x)$ “).

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^2 0 - f(x) \, dx = \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^2 -2x \cdot \ln(0,5x) \, dx = \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[-x^2 \cdot \ln(0,5x) \right]_0^2 - \int_0^2 -x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[-x^2 \cdot \ln(0,5x) \right]_0^2 + \int_0^2 x \, dx = \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[-x^2 \cdot \ln(0,5x) \right]_u^2 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_u^2 = \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[-2^2 \cdot \ln(0,5 \cdot 2) \right] - \left[-u^2 \cdot \ln(0,5 \cdot u) \right] + \left[\frac{1}{2} 2^2 \right] - \left[\frac{1}{2} u^2 \right] = \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[-2^2 \cdot 0 \right] - \underbrace{\left[-u^2 \cdot \ln(0,5 \cdot u) \right]}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow -\infty}} + \left[2 \right] - \underbrace{\left[\frac{1}{2} u^2 \right]}_{\rightarrow 0} = \mathbf{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u &= -x^2 \\
 u' &= -2x \\
 v &= \ln(0,5x) \\
 v' &= \\
 \frac{1}{0,5x} \cdot 0,5 &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

Kap.10g) zweite, noch größere (und hässlichere) Beispielaufgabe

Es sei $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+0,25)}$

-Untersuchen Sie $f(x)$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, sowie Extrempunkte.

Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein.

-Die Parallele zur x -Achse durch den Kurvenpunkt $P(a|f(a))$, schneidet die senkrechten Asymptoten in den Punkten F und D .

Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch F , D und $H(0|-0,72)$ entsteht, einen Flächeninhalt von $A_{\Delta}=4$ (LE^2) beträgt.

Definitionsmenge:

Zum einen gibt's in dieser Funktion einen Nenner, zum anderen gibt's einen \ln -Term.

Der Nenner darf nie Null werden, vom \ln darf das Argument nie negativ werden.

Kucken, wo der Nenner Null wird:

$$\begin{array}{ll}
 \ln(x^2+0,25) \neq 0 & | e^{(\quad)} \\
 x^2+0,25 \neq e^0 = 1 & | -0,75 \\
 x^2 \neq 0,75 & | \sqrt{\quad} \\
 x \neq \pm 0,866 &
 \end{array}$$

Kucken wann das Argument vom \ln negativ wird:

5 „Produktintegration“ heißt manchmal auch „partielle Integration“

$x^2 + 0,25 < 0$
 $x^2 < -0,25$
 geht nicht \Rightarrow keine Probleme \Rightarrow keine Einschränkung für x .

$$D = \mathbb{R} \setminus \{ \pm 0,866 \}$$

Symmetrie:

Ob's eine Symmetrie zum Ursprung hat oder eine Symmetrie zur y-Achse oder gar keine Symmetrie ... kann man erst `mal nur raten⁽⁶⁾. Ich rate `mal eine Symmetrie zur y-Achse. (Tatsächlich weiß ich sicher dass es so eine ist, ich hab ja schließlich die Aufgabe aufgestellt!! Schlaue, gell?)

Nachweis für Symmetrie zur y-Achse:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(-x) \\
 \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} &= \frac{1}{\ln((-x)^2+0,25)} \\
 \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} &= \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} \quad (\text{wahre Aussage} \Rightarrow \text{bewiesen})
 \end{aligned}$$

Asymptoten:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} \rightarrow \infty} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} \rightarrow \infty} = 0$$

Verhalten an den Definitionslücken:

Wenn $x \rightarrow \pm 0,866$ (s.Def.) strebt, geht „ $x^2 + 0,25$ “ gegen 1. $\ln(1)$ geht gegen Null.

Also lautet die Funktion: 1 durch 0.

Da „Zahl durch Null“ gegen Unendlich strebt, geht $f(x)$ gegen Unendlich.

(Ob's jetzt $+\infty$ oder $-\infty$ ist kriegen wir bei der Kurvendiskussion raus. Da haben wir kein Bock drauf!)

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} = (\ln(x^2+0,25))^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot (\ln(x^2+0,25))^{-2} \cdot \frac{2x}{x^2+0,25} = \frac{-1}{(\ln(x^2+0,25))^2} \cdot \frac{2x}{x^2+0,25}$$

Diese Ableitung ist bereits begrenzt häßlich. Wir verzichten daher großzügig auf die zweite Ableitung und untersuchen nachher, bei der Überprüfung der Hoch- und Tiefpunkte, $f'(x)$ auf Vorzeichenwechsel. (Dann lernt Ihr das auch noch)

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \frac{1}{\ln(x^2+0,25)} &= 0 \quad | \cdot \ln(x^2+0,25) \\
 1 &= 0 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

keine Nullst.

Extrempunkte:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \frac{-1}{(\ln(x^2+0,25))^2} \cdot \frac{2x}{x^2+0,25} &= 0 \quad | \cdot (\ln(x^2+0,25))^2 \cdot (x^2+0,25) \\
 -1 \cdot 2x &= 0 \\
 -2x &= 0 \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

Um zu schauen, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt, setzt man normalerweise x in $f''(x)$

6 Wenn in einer Funktion *nur* gerade Hochzahlen auftauchen, ist sie *immer* symmetrisch zur y-Achse

ein. Da wir nun zu bequem waren $f''(x)$ auszurechnen, untersuchen wir $f'(x)$ auf Vorzeichenwechsel. Das geht so: Unser x -Wert ist $x=0$. Nun schauen wir was für Vorzeichen $f'(x)$ hat, wenn x knapp kleiner als Null ist und was für Vorzeichen $f'(x)$ hat, wenn x knapp größer als Null ist.

I) x strebt von links gegen Null, d.h. x ist eine sehr kleine, negative Zahl. ($x \rightarrow 0^-$)

$$\text{für } x \rightarrow 0^- \text{ gilt: } \underbrace{\frac{-1}{(\ln(x^2+0,25))^2}}_{\substack{- \\ +}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{x^2+0,25}}_{\substack{- \\ +}} > 0$$

$(\ln(x^2+0,25))^2$ ist immer positiv, da jedes *Quadrat* positiv ist.

$x^2+0,25$ ist immer positiv, da x^2 positiv ist, damit ist $x^2+0,25$ erst recht positiv.

$2x$ ist negativ, da x negativ ist.

II) x strebt von rechts gegen Null, d.h. x ist eine sehr kleine, positive Zahl. ($x \rightarrow 0^+$)

$$\text{für } x \rightarrow 0^+ \text{ gilt: } \underbrace{\frac{-1}{(\ln(x^2+0,25))^2}}_{\substack{- \\ +}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{x^2+0,25}}_{\substack{+ \\ +}} < 0$$

$(\ln(x^2+0,25))^2$ ist immer positiv, da jedes *Quadrat* positiv ist.

$x^2+0,25$ ist immer positiv, da x^2 positiv ist, damit ist $x^2+0,25$ erst recht positiv.

$2x$ ist positiv, da x positiv ist.

Da $f'(x)$ immer die Steigung einer Funktion ist, wissen wir jetzt, dass die Steigung von $f(x)$ links von Null positiv ist (d.h. die Funktion steigt), rechts von Null (also für positive x -Werte) ist die Steigung negativ (die Funktion fällt also).

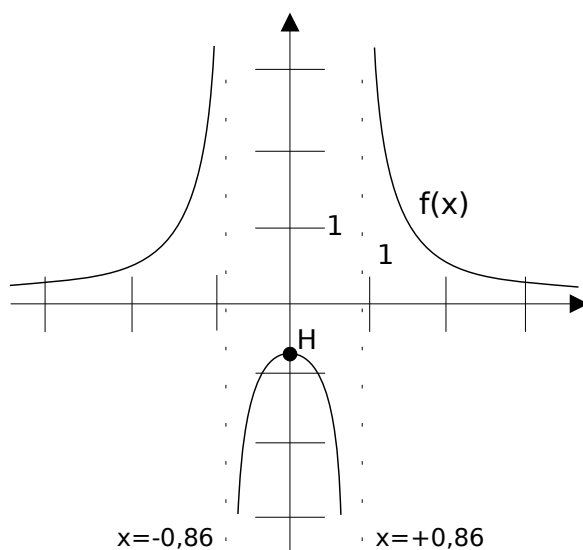
Wenn die Funktion links von Null steigt, rechts von Null fällt, muss bei $x=0$ ein Hochpunkt sein.

$$\Rightarrow \quad H(0 \mid ?)$$

$$\text{y-Wert: } f(0) = \frac{1}{\ln(0^2+0,25)} \approx -0,72$$

$$\Rightarrow \quad H(0 \mid -0,72)$$

Zeichnung:



Parallele durch $P(a|f(a))$, blabla mit Fläche vom Dreieck FDH. ⁽⁷⁾

Die Punkte F und D liegen zum einen auf den senkrechten Asymptoten, haben also die x-Werte $x_F = -0,866$ bzw. $x_D = +0,866$. Zum anderen liegen sie auf der Parallelen zur x-Achse durch P, haben also den gleichen y-Wert wie P, also $f(a)$. (siehe Skizze)

Damit haben wir die Koordinaten von F und D:

$$F(-0,866 | f(a)) \quad D(+0,866 | f(a))$$

Die Fläche des Dreiecks FDH lässt sich berechnen über:

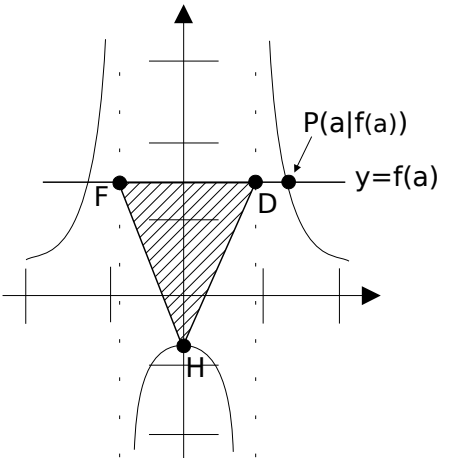
$$A_{FDH} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Als Grundlinie g könnte man die Strecke \overline{FD} wählen. Die Streckenlänge von \overline{FD} ist der Abstand der beiden senkrechten Asymptoten, also:

$$g = x_D - x_F = +0,866 - (-0,866) = 1,732$$

Die Höhe des Dreiecks ist die Differenz der y-Werte von F (bzw. D) und dem y-Wert von H.

$$h = y_F - y_H = f(a) - (-0,72) = f(a) + 0,72$$



$$A_{FDH} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 1,732 \cdot (f(a) + 0,72)$$

$$4 = 0,866 \cdot (f(a) + 0,72)$$

$$4,62 = f(a) + 0,72$$

$$3,90 = f(a)$$

$$3,90 = \frac{1}{\ln(a^2 + 0,25)}$$

$$3,90 \cdot \ln(a^2 + 0,25) = 1$$

$$\ln(a^2 + 0,25) = 0,26$$

$$a^2 + 0,25 = e^{0,26} = 1,30$$

$$a^2 = 1,04$$

$$\Rightarrow a \approx 1$$

$$| : 0,866$$

$$| - 0,72$$

so langsam, könnten wir $f(a)$ ersetzen...

$$| \cdot \ln(a^2 + 0,25)$$

$$| : 3,90$$

$$| e^{(\cdot)}$$

$$| - 0,25$$

Na, suupertoll.

Ente-Banane !

7 FDH : Es handelt sich um ein sehr schlankes Dreieck.