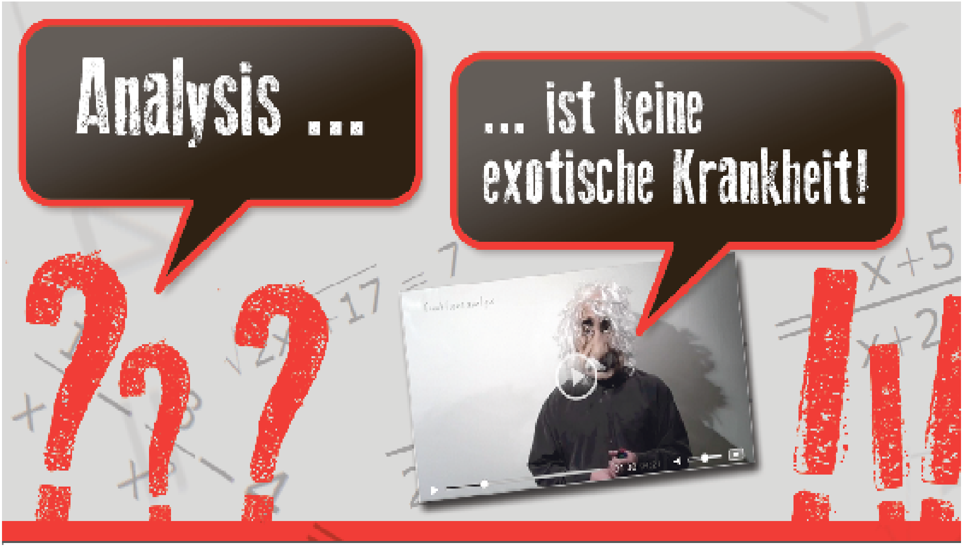
mathe seite
Die gute Seite an Mathe.

Mathe-Trainings-Heft

Prüfungsvorbereitung für Oberstufe und Abitur



Übungsaufgaben mit Lösungen

Vektorgeometrie [V]

Punkte, Geraden und Ebenen
Abstände berechnen
Kreise und Kugeln
Pyramiden
... und mehr

Kostenlose Videos mit Rechenwegen auf **Mathe-Seite.de**

Mrz.2015

Kombinieren Sie Lern-Videos mit Lern-Schriften - für bessere Noten.

Sie möchten nicht nur die Lern-Videos schauen, sondern auch mal ein paar Übungsaufgaben rechnen oder Theorie nachlesen? Dann nutzen Sie die kostenlosen Lern-Schriften!
Das Besondere an den Lern-Schriften ist, dass Struktur und Inhalte identisch mit den Lern-Videos auf der Mathe-Seite.de sind. Falls Sie also in den Lern-Schriften etwas nicht verstehen, finden Sie die nötigen Erklärungen im Lern-Video - am schnellsten via QR-Codes.

Lern-Schriften + Lern-Videos = bessere Noten

Was das nützt: Das Lernen wird wesentlich effektiver, denn Sie profitieren vom sogenannten "crossmedialen Effekt". Der kommt aus der Werbe-Psychologie und bewirkt, dass Sie die Thematik intensiver wahrnehmen, besser verstehen und länger memorieren.
Das bietet übrigens nur die Mathe-Seite.de!

Das Mathe-Trainings-Heft (MTH)

Das vorliegende Mathe-Trainings-Heft beinhaltet Rechenaufgaben und Lösungen speziell zur Prüfungsvorbereitung für Oberstufe und Abitur. Solltest Sie eine Aufgabe nicht lösen können, finden Sie den Rechenweg direkt per QR-Link im Lern-Video. Zum Beispiel: Den Lösungsweg zu den Übungsaufgaben [V.02.06] finden Sie online auf der Mathe-Seite.de im Kapitel [V.02.06].
Vermutlich brauchen Sie nicht alle der im MTH enthaltenen Mathe-Themen. Unter [www.mathe-seite.de > Abi-Themen nach Bundesland](http://www.mathe-seite.de) finden Sie eine Liste mit denjenigen Themen, die für Ihr Bundesland und Ihre Schulart relevant sind.

Weitere kostenlose Lern-Schriften auf Mathe-Seite.de

- Die Lernbuch-Reihe – detailliertes Fachwissen in mehreren Bänden
- Die Mathe-Fibel – alles Nötige in Kompaktform
- Die Lern-Kartei-Karten – handlich und clever
- Die Formelsammlung – das unverzichtbare Nachschlagewerk
- Die Anleitungen für Grafische Taschenrechner – endlich verständlich

V.01 Punkte, Geraden und Ebenen

V.01.01 | Zeichnen im 3D-Koordinatensystem

[01] Zeichnen Sie A(4|1|3), B(2|6|-2), C(-3|5|1), D(0|5|-3).
Zeichnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
Wie entsteht $\overrightarrow{BC}$ aus $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$?

[02] Ein Quader hat die Eckpunkte: A(6|0|0), C(0|4|0), H(0|0|3).
Zeichnen Sie den Quader in ein Koordinatensystem.
Bestimmen Sie die restlichen Eckpunkte.

[03] Zeichnen Sie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

V.01.02 | Mittelpunkte, Schwerpunkte, Richtungsvektoren

[01] A(3|2|0), B(7|-3|8), C(-1|4|-2)
Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_{AB} der Strecke AB.
Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABC.
Bestimmen Sie die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
Zeichnen Sie die Punkte A, B, C und den Vektor $\overrightarrow{AB}$ ein.

[02] Gegeben ist das Dreieck PQR mit P(3|2|0), Q(7|-3|8), R(-1|4|-2).
Berechnen Sie die Koordinaten der Seitenmitten M_{PQ}, M_{PR}, M_{QR} des Dreiecks PQR. Zeigen Sie: die Schwerpunkte der Dreiecke PQR und $M_{PQ}M_{PR}M_{QR}$ fallen zusammen.

V.01.03 | Parameterform von g aufstellen

Stellen Sie eine Parameterform der Gerade auf, die durch die beiden Punkte geht:
[01] durch A(5|4|1) und B(3|3|2) bzw. durch C(-3|4|-1) und D(-1|3|1)
[02] durch P(0|-3|9) und Q(4|3|7) bzw. durch R(2|4|8) und S(4|5|7)

V.01.04 | Erklärung der Ebenenformen (PF, KF, NF, HNF, AAF)

Machen Sie sich klar, wie die verschiedenen Ebenenformen aussehen, wofür man sie verwendet und welche Angaben zum Aufstellen notwendig sind.
[01] Parameterform (PF) [02] Koordinatenform (KF) [03] Normalenform (NF)
[04] Hesse-Normal-Form (HNF) [05] Achsen-Abschnitts-Form (AAF)

V.01.05 | Parameterform von E aufstellen

Geben Sie eine Parameterform der Ebene E an, welche bestimmt ist durch:
[01] A(2|4|1), B(1|2|-1), C(3|-4|-2) [02] A(2|-3|2), B(0|3|2) und C(3|0|-2)

[03] P(0|1|-1) und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ [04] P(-1|1|1) und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

[05] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ [06] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[07] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ [08] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

V.01.06 | Ebenenformen umwandeln (Parameterform in Koordinatenform)
Geben Sie eine Koordinatenform der Ebene E an

[01],[04],[07] $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-8\\-3\end{pmatrix}$

[02],[05],[08] $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$

[03],[06],[09] $E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

V.01.07 | Ebenenformen umwandeln (Koordinatenform in Parameterform)
Geben Sie eine Parameterform der Ebene E an
[01] $E : 2x_1+x_2-2x_3=6$ [02] $E : 6x_1+2x_2+3x_3=12$ [03] $E : 4x_1+3x_2+2x_3=1$
[04] $E : x_1+3x_3=6$ [05] $E : 2x_2-3x_3=12$

V.01.08 | Ebenenformen umwandeln (Koord.form in Normalenf. und zurück)
Wandeln Sie die angegebene Koordinatenform (KF) der Ebene E in Normalenform um. Wenn Sie erfolgreich waren, dürfen Sie Ihr Ergebnis wieder in KF umwandeln.
[01] $2x_1+x_2-2x_3=6$ [02] $6x_1+2x_2+3x_3=12$ [03] $4x_1+3x_2+2x_3=1$

V.01.09 | Spurpunkte, besondere Lage von Gerade
Bestimmen Sie die Spurpunkte der Gerade g.
Welche besondere Lage hat die Gerade im Raum?

[01] $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ [02] $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$

[03] $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ [04] $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$

V.01.10 | Spurpunkte, besondere Lage von Ebenen
Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebene E.
Welche besondere Lage hat die Ebene im Raum?
[01] $E: 2x_1-3x_2+6x_3=12$ [02] $E: x_1+3x_2+2x_3=6$
[03] $E : -2x_1+3x_3=6$ [04] $E: 3x_2-x_3=3$

V.01.11 | Zeichnen von Ebenen
Zeichnen Sie die Ebene mithilfe der Spurpunkte in ein Koordinatensystem ein.
[01] $E : 2x_1-3x_2+6x_3=12$ [02] $E : 3x_2-x_3=3$

Zeichnen Sie die beiden Ebenen in ein Koordinatensystem ein,
zeichnen Sie auch die Schnittgerade der beiden Ebenen ohne weitere Rechnung ein.
[03] $E : x_1+3x_2+2x_3=6$ und $F : 2x_1+3x_3=6$

V.02 Schnittmengen

V.02.01 | Gegenseitige Lage von Geraden / Schnitt von Geraden

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\8\\11\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

[03] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$

[04] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}$

V.02.02 | Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene / Schnitt Ebene-Gerade

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und der Ebene E.
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ und $E: 4x_1-3x_2+x_3 = 6$

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ und $E: 2x_1+x_2+2x_3 = 7$

[03] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ und $E: -x_1+x_2+x_3 = 2$

V.02.03 | Gegenseitige Lage von Ebenen / Schnitt Ebene-Ebene

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_1 und E_2.
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

[01] $E_1: 2x_1+4x_2-4x_3=2$ und $E_2: x_1+2x_2-2x_3=5$
[02] $E_1: 6x_1-4x_2+4x_3=8$ und $E_2: -3x_1+2x_2-2x_3=-4$
[03] $E_1: 2x_1+5x_2+3x_3=2$ und $E_2: x_1+2x_2+x_3=2$
[04] $E_1: x_1+x_2+3x_3 = 4$ und $E_2: 2x_1+x_2-x_3=-2$

V.03 Abstände

V.03.01 | Abstand zweier Punkte

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Punkte.

[01] A(2|-1|3), B(4|1|2) [02] C(-4|2|5), D(2|5|3)
[03] P(0|1|1), Q(3|8|-2)

V.03.02; V.03.03; V.03.04; V.03.05 | Abstand Punkt-Gerade

Bestimmen Sie den Abstand von der Gerade zum angegebenen Punkt.

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ und A(5|5|7)

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und P(-5|2|-1)

[03] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ und Z(11|10|9)

V.03.06 | Abstand Punkt-Ebene über Lotgerade

Welcher Punkt der Ebene E vom Punkt P den geringsten Abstand?
Wie groß ist dieser Abstand?

[01] P(5|-6|4) und E: $4x_1-8x_2+x_3 = -9$
[02] P(13|4|5) und E: $6x_1-3x_2-2x_3 = 7$
[03] P(4|7|8) und E: $-2x_1+x_2+2x_3 = 6$

V.03.07 | Abstand Punkt-Ebene über HNF

Welcher Punkt der Ebene E vom Punkt P den geringsten Abstand?
Verwenden Sie die Methode über die Hesse-Normal-Form?

[01] P(5|-6|4) und E: $4x_1-8x_2+x_3 = -9$
[02] P(13|4|5) und E: $6x_1-3x_2-2x_3 = 7$
[03] P(4|7|8) und E: $-2x_1+x_2+2x_3 = 6$

V.03.08 | Abstand von zwei parallelen Objekten

Weisen Sie nach, dass beide angegebenen Objekte parallel sind.
Wie groß ist deren Abstand?

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $E: 7x_1+7x_2-4x_3 = 3$

[03] $E_1: 6x_1+3x_2-6x_3 = 9$ und $E_2: 2x_1+x_2-2x_3 = 21$

V.03.09; V.03.10 | Abstand zweier windschiefen Geraden

Wie groß ist der Abstand der beiden windschiefen Geraden?

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[03] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

V.04 Spiegeln

V.04.01 | Senkrechte Spiegelung

[01] Spiegeln Sie A(2|-1|5) und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ am Ursprung.

[02] Spiegeln Sie B(4|2|-3) und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der x_2-Achse.

[03] Spiegeln Sie C(3|5|1) und $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ an der x_1-x_2-Ebene.

V.04.02 | Spiegeln von Punkt an Punkt

Spiegeln Sie den einen Punkt am zweiten.

[01] A(3|1|0) an S(6|4|1) [02] B(-2|1 |3) an P(1|2|2)
[03] P(7|5|-4) an Z(2|5|0)

V.04.03 | Spiegeln von Punkt an Gerade

Spiegeln Sie den Punkt an der angegebenen Gerade

[01] A(3|2|-1) an $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [02] B(4|7|-1) an $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

[03] C(0|6|7) an $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

V.04.04 | Spiegeln von Punkt an Ebene

Spiegeln Sie den Punkt an der angegebenen Ebene E

[01] P(0|11|4) an $E: -2x_1+5x_2+3x_3 = -9$ [02] Q(6|-11|8) an $E: 3x_1-12x_2+4x_3=13$

[03] R(4|4|7) an $E: -x_1+x_2+2x_3=26$

V.04.05 | Spiegeln von diversem Zeug

Erläutern Sie, wie man vorgeht, um folgende Spiegelungen durchzuführen

[01] Gerade an Punkt [02] Ebene an Punkt

[03] Gerade an Gerade [04] Ebene an Gerade

[05] Gerade an Ebene [06] Ebene an Ebene

V.05 Diverses Zeug

V.05.01 | Winkelberechnung

Bestimmen Sie die angegebenen Winkel

[01] Winkel zwischen $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[02] Winkel zwischen $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

[03] Winkel zwischen $E : x_1+2x_2-2x_3 = 5$ und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

[04] Winkel zwischen $E_1 : x_1+2x_2-2x_3 = 5$ und $E_2 : 6x_1-3x_2+2x_3 = 12$

[05] Innenwinkel im Dreieck ABC mit A(4|1|3), B(2|6|-2), C(-3|5|1)

[06] Innenwinkel im Parallelogramm ABCD mit den Eckpunkten A(-2|1|2), B(2|5|4), C(4|-1|7) und D(0|-5|5).

V.05.02 | Skalarprodukt

Bestimmen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren.
Stehen die Vektoren senkrecht aufeinander?

[01] $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ [02] $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ [03] $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

V.05.03 | Kreuzprodukt

Geben Sie mithilfe des Kreuzprodukts denjenigen Vektor an, der auf den beiden angegeben Vektoren orthogonal (=senkrecht) steht.

[01] $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ [02] $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ [03] $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie mithilfe des Kreuzprodukts:
[04] den Flächeninhalt des Dreiecks ABC: A(1|4|-3), B(2|0|1), C(5|2|0)
[05] die Parallelogrammfläche ABCD: A(3|2|1), B(5|3|-1), C(7|0|1), D(5|-1|3)
[06] das Volumen der Pyramide: A(-2|2|1), B(4|4|4), C(1|2|2), S(1|4|0)
[07] Volumen der Pyramide: A(-2|3|4), B(4|5|7), C(6|8|1), D(0|6|-2), S(1|11|9)

V.05.04 | Der vierte Punkt eines Parallelogramms

Bestimmen Sie:
[01] D so, dass ABCD mit A(4|1|3), B(2|6|-2), C(3|5|1) ein Parallelogramm ist.
[02] A so, dass ABCD mit B(2|2|-1), C(3|4|1), D(7|0|3) ein Reckteck ist.
[03] C so, dass ABCD mit A(-2|1|5), B(4|4|3), D(-4|7|8) ein Quadrat ist.

V.05.05 | Liegt Punkt im Inneren eines Dreiecks oder Parallelogramms?

[01] Liegt P(2|3|1) im Inneren des Parallelogramms ABCD
mit A(4|1|3), B(2|6|-2), C(0|2|2) und D(2|-3|7)?
[02] Liegt P(0|-5|2) im Inneren des Quadrats ABCD
mit A(-2|1|5), B(4|4|3), C(2|10|6) und D(-4|7|8)?
[03] Liegt D(3|5|2) im Inneren des Dreiecks ABC
mit A(-2|4|5), B(4|4|3) und C(2|6|1)?
[04] Liegt D(4|3|-1) im Inneren des Dreiecks ABC
mit A(1|3|-5), B(3|1|3) und C(-2|0|-1)?

V.05.06 | Dreiecksfläche

Bestimme den Flächenhalt des Dreiecks ABC über die Flächeinhaltsformel A=½·g·h
(Sie erhalten hier bessere Zahlen, wenn Sie die Seite AB als Grundseite verwenden.)
[01] A(-3|1|0), B(5|-3|8) und C(2|0|8).
[02] A(6|-1|3), B(2|3|3) und C(2|-1|7)
[03] A(3|-2|-1), B(-1|2|1) und C(-3|7|5)

V.05.07 | Dreiecksfläche

Bestimme den Flächenhalt des Dreiecks mithilfe des Kreuzproduktes (=Vektorprodukt)
[01] A(-2|-3|1), B(7|9|1) und C(-3|4|3)
[02] A(6|-5|6), B(-2|9|-2) und C(5|2|1)
[03] A(-3|1|2), B(3|3|5) und C(5|6|-1)

V.06 Kreise und Kugeln

V.06.01 | Allgemeines zur Kreisgleichung

[01] Stelle eine Kreisgleichung auf mit M(3|4) und r=5.
[02] Welcher Kreis hat M(7|4) als Mittelpunkt und geht durch P(-5|-1)?
[03] Beschreibt $x_1^2+x_2^2+3x_1-4x_2+9=0$ einen Kreis?

V.06.02 | Schnitt Kreis-Gerade

Untersuchen Sie, ob sich der Kreis K und die Gerade g schneiden.
Geben Sie ggf die Schnittpunkte an.
[01] K : $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ g : $y = x+3$
[02] K : $(x+4)^2+(y-2)^2=100$ g : $y =-x+12$
[03] K : $(x+2)^2+(y-8)^2=169$ Gerade durch A(0|-11) und B(-5|-6)

V.06.03 | Schnitt von zwei Kreisen

Untersuchen Sie, ob sich die beiden Kreise schneiden.
Geben Sie ggf. die Schnittpunkte an.

[01] $K_1 : (x+2)^2+(y-1)^2=25$ $K_2 : (x-4)^2+(y-4)^2=10$
[02] $K_1 : (x+1)^2+(y-2)^2=5$ $K_2 : (x-1)^2+y^2=1$
[03] $K_2 : (x-1)^2+(y-7)^2=26$ $K_2 : (x+1)^2+(y-10)^2=65$

V.06.04 | Abstand Punkt-Kreis

Bestimmen Sie den Abstand vom Punkt zum Kreis.
Entscheiden Sie, ob der Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.

[1] $K : (x-4)^2+(y+1)^2=49$ $P(-8|4)$
[2] $K : (x+3)^2+(y-5)^2=25$ $P(1|2)$
[3] $K : (x+2)^2+(y+2)^2=36$ $P(0|0)$

V.06.05 | Abstand Gerade-Kreis

Bestimmen Sie den Abstand der Gerade zum Kreis.

[01] $K : (x-4)^2+(y+1)^2= 9$ $g : y = x + 3$
[02] $K : (x+3)^2+(y-5)^2=25$ $g : x-2y-7=0$
[03] $K : (x+2)^2+(y+2)^2=10$ $g : y+3x = 2$

V.06.06 | Abstand Kreis-Kreis

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Kreise.

[01] $K_1 : (x-7)^2+(y+2)^2=25$ $K_2 : (x+5)^2+(y-3)^2=64$
[02] $K_1 : (x+4)^2+(y-5)^2=49$ $K_2 : (x+1)^2+(y-1)^2=81$
[03] $K_1 : (x+2)^2+(y+6)^2=16$ $K_2 : (x-5)^2+(y+2)^2=4$

V.06.07 | Allgemeines zur Kugelgleichung

[01] Stellen Sie eine Kugelgleichung auf mit $M(3|4|5)$ und $r=6$.
[02] Welche Kugel hat $M(1|3|-5)$ als Mittelpunkt und geht durch $P(4|1|-1)$?
[03] Beschreibt $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1+4x_2-8x_3=-20$ eine Kugel?

V.06.08 | Schnitt Kugel-Gerade

Untersuchen Sie, ob sich die Kugel K und die Gerade g schneiden.
Geben Sie gegebenfalls die Schnittpunkte an.

[01] $K : (x_1-1)^2+(x_2+2)^2+(x_3-4)^2=1$ $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[02] $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 1$ $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

[03] $K : (x_1+1)^2+(x_2-3)^2+(x_3+2)^2=27$ $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

V.06.09 | Schnitt Kugel-Ebene

Untersuchen Sie, ob sich die Kugel K und die Ebene E schneiden.
Geben Sie ggf. den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises an.

[01] $K : (x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=100$ $E : 2x_1-2x_2-x_3 = -5$
[02] $K : (x_1-1)^2+(x_2-9)^2+(x_3-4)^2 = 85$ $E : 6x_1+2x_2+3x_3=49$
[03] $K : (x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3+4)^2= 18$ $E : x_1+2x_2+2x_3 = 10$

V.06.10 | Schnitt zweier Kugeln

Untersuchen Sie, ob sich die beiden Kugeln schneiden.
Geben Sie gegebenfalls den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises an.

[01] $K_1:(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=100$ $K_2:(x_1-3)^2+x_2^2+(x_3-2)^2=109$
[02] $K_1:(x_1-3)^2+(x_2-6)^2+(x_3-8)^2=64$ $K_2:(x_1+9)^2+(x_2-2)^2+(x_3-2)^2=64$
[03] $K_1:(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3+4)^2=18$ $K_2:(x_1-4)^2+(x_2-5)^2+(x_3+2)^2=43$

V.06.11 | Punkt und Kugel

Liegt der Punkt P innerhalb oder außerhalb der Kugel K. Wie groß ist der Abstand?

[01] $K:(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=100$, $P(5|-2|1)$
[02] $K: x_1^2+(x_2-4)^2+(x_3-3)^2=85$ $P(8|-4|7)$ $P\in K$?
[03] $K: (x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3+4)^2=18$ $P(0|6|-4)$ $P\in K$?

V.06.12 | Abstand Gerade-Kugel

Bestimmen Sie den Abstand der Kugel K von der Gerade g.

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$, $K:(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+(x_3-7)^2=1$

(vergl: →V.03.02.01, V.03.03.01, V.03.04.01)

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $K:(x_1+5)^2+(x_2-2)^2+(x_3+1)^2=9$

(vergl.: →V.03.02.02, V.03.03.02, V.03.04.02)

[03] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$, $K:(x_1-11)^2+(x_2-10)^2+(x_3-9)^2=4$

(vergl.: →V.03.02.03, V.03.03.03, V.03.04.03)

V.06.13 | Abstand Kugel-Ebene

Bestimmen Sie den Abstand der Kugel K von der Ebene E.

[01] $K: (x_1+2)^2+(x_2-1)^2+(x_3+3)^2=4$ $E: 2x_1+2x_2-x_3=10$
[02] $K: (x_1+5)^2+(x_2-4)^2+(x_3-1)^2=16$ $E: 6x_1-2x_2+3x_3=7$
[03] $K: (x_1-6)^2+(x_2-7)^2+(x_3-5)^2=81$ $E: 4x_1+8x_2+x_3=4$

V.06.14 | Abstand zweier Kugeln

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Kugeln voneinander.

[01] $K_1:(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=25$ $K_2:(x_1+7)^2+(x_2-3)^2+(x_3+1)^2=9$
[02] $K_1:(x_1+3)^2+(x_2-6)^2+(x_3-1)^2=1$ $K_2:(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3+1)^2=25$
[03] $K_1:(x_1+2)^2+(x_2-3)^2+x_3^2=81$ $K_2:(x_1+3)^2+(x_2-1)^2+(x_3+2)^2=16$

V.06.15 | Tangentialebene

Bestimmen Sie die Tangentialebene E_{Tan} an die Kugel K im Berührpunkt B.

[01] $K: (x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=36$ $B(3|-2|-1)$
[02] $K: x_1^2+(x_2-4)^2+(x_3-3)^2=9$ $B(2|2|c)$ mit $c<3$
[03] $K: (x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3+4)^2=49$ $B(a|1|2)$ mit $a<1$

V.06.16 | Tangentialkegel

Bestimmen Sie:

[01] $K: (x_1+2)^2+(x_2-1)^2+(x_3+3)^2=4$ $P(0|-2|3)$
a) den Öffnungswinkel b) den Radius des Schnittkreises
[02] $K: (x_1+5)^2+(x_2-4)^2+(x_3-1)^2=16$ $P(-1|2|5)$
a) den Öffnungswinkel b) den Radius des Schnittkreises
c) das Volumen des Kegels zwischen Schnittkreis und Punkt P.

[03] $K : (x_1-6)^2+(x_2-7)^2+(x_3-5)^2=9$ $P(2|-1|4)$

a) den Öffnungswinkel b) den Radius des Schnittkreises

c) die Mantelfläche des Kegels zwischen Schnittkreis und Punkt P.

V.06.17 | Polarkreis / Polarebene

Vom Punkt P werden Tangenten an die Kugel K gelegt.
Wie groß ist der Öffnungswinkel des Kegels?
In welcher Ebene liegen alle Berührpunkte?

[01] $K : (x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=16$ $P(-3|-2|-1)$

[02] $K : x_1^2+(x_2-4)^2+(x_3-3)^2 = 64$ $P(8|8|-5)$

In welcher Ebene liegen alle Berührpunkte?

[03] $K : (x_1+3)^2+(x_2-3)^2+(x_3+4)^2=9$ $P(4|-1|3)$

Umkugel und **Inkugel** finden Sie in Kapitel V.09.05 und V.09.06.

V.07 Pyramiden

V.07.01 | Pyramide zwischen Ebene und den Koordinatenebenen

Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide,
die von der Ebene E und den Koordinatenebenen gebildet wird.

[01] $E : 2x_1+4x_3+3x_3 = 12$ [02] $E : x_1+x_2+x_3 = 6$

[03] $E : -3x_1+2x_2+6x_3 = 18$

V.07.02 | Senkrechte, quadratische Pyramide

[01] Bestimmen Sie das Volumen der senkrechten, quadratischen Pyramide ABCDS mit $A(-2|-2|0)$, $B(4|-2|0)$, $C(4|4|0)$, $D(-2|4|0)$ und $S(1|1|8)$.

[02] Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze der senkrechten, quadratischen Pyramide mit den Eckpunkten der Grundfläche in $A(8|0|0)$, $B(8|8|0)$, $C(0|8|0)$, $D(0|0|0)$ und dem Volumen von $V=128$.

[03] Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte der senkrechten, quadratischen Pyramide ABCDS mit der Spitze in $S(0|0|12)$ und dem Volumen von $V=64$, wenn die Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt.

V.07.03; V.07.04 | Volumen einer dreiseitigen Pyramide

Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C und D.

[01] $A(-1|0|2)$, $B(5|6|5)$, $C(2|0|5)$, $D(1|5|6)$

[02] $A(-4|4|4)$, $B(4|-4|4)$, $C(4|4|-4)$, $D(4|4|4)$

[03] $A(1|3|2)$, $B(3|-1|4)$, $C(5|4|6)$, $D(9|2|6)$

V.08 Parameter

V.08.01 | Ebenenscharen

[01] Welche Ebene der Schar $E_t : 2tx_1+tx_2+2x_3=t+4$ enthält $A(1|2|-1)$?

[02] Welche Ebene der Schar $E_t : 2tx_1+tx_2+2x_3=t+4$ hat vom Punkt $P(5|3|5)$ den Abstand $d=6$?

[03] Welche Ebene der Schar $E_t : tx_1+3x_2=t+4$ schließt mit der Ebene $F : x_2-x_3=3$ einen Winkel von 45° ein?

[04] Alle Ebenen der Schar $E_t : 2tx_1+tx_2+2x_3=t+4$ haben eine gemeinsame Schnittgerade s. Bestimmen Sie eine Gleichung von s.

[05] Die Ebenen der Schar $E_t: 2tx_1+tx_2+2x_3=t+4$ rotieren alle um die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Eine einzige dieser rotierenden Ebenen kann nicht durch E_t beschrieben werden. Bestimmen Sie deren Gleichung.

V.08.02 | Punkt einer Gerade mit bestimmten Abstand zu einer Ebene

Bestimmen alle die Punkte der Gerade g, die zur Ebene E den Abstand d besitzen.

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\-4\end{pmatrix}$, $E: 6x_1+2x_2-3x_3=5$, $d=7$.

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$, $E: 2x_1+x_2-2x_3=4$, $d=6$.

V.08.03 | Punkt einer Gerade mit bestimmten Abstand zu einem Punkt

Bestimmen alle die Punkte der Gerade g, die zum Punkt P den Abstand d besitzen.

[01] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, A(3|4|4), $d=3$.

[02] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, A(5|2|6), $d=6$.

[03] $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$, A(4|3|2), $d=15$?

V.08.04 | Lage von Gerade und Ebene in Abhängigkeit vom Parameter

[01] Bestimme die gegenseitige Lage der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}ü\\3\\-2\end{pmatrix}$ und der Ebene $E: 3x_1+x_2+2x_3=4$ in Abhängigkeit von ü.

[02] Für welche Werte von a sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1+ax_2+2x_3=4$ parallel ?

[03] Bestimme die gegenseitige Lage der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\y\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und der Ebene $E: 3x_1+x_2+2x_3=4$ in Abhängigkeit von y.

V.08.05 | Geradenpunkt bildet rechten Winkel mit zwei anderen Punkten

[01] Welcher Punkt G der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ bildet mit A(1|1|3) und B(4|3|2) ein im G-Punkt rechtwinkliges Dreieck ?

[02] Welche Punkt T der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ bildet mit A(6|0|-8) und B(8|3|3) ein Dreieck, welches in A einen rechten Winkel hat ?

V.08.06 |Geradenschar

[01] Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\k+1\\2k\end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen. Geben eine Ebenengleichung an.

[02] Gegeben sind die Geraden $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\k+1\\2k\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.
Für welche Werte von „k“ schneiden sich die beiden Geraden?

V.09 Anwendungsaufgaben

V.09.01 | Flugzeugaufgabe 1

Ein Flugzeug befindet sich anfangs in A(2|12|0), eine Minute später in B(10|8|1). Ein zweites Flugzeug startet zeitgleich in C(3|9|9) und hat eine Minute später die Position D(15|4|9) erreicht.

[01] Bestimmen Sie die Geraden, welche jeweils die Flugbahnen der beiden Flugzeuge beschreiben.
[02] Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der Flugzeuge.
[03] Wann haben beide Flugzeuge die gleiche Flughöhe erreicht?
[04] Wie nah kommen sich die beiden Flugbahnen?
[05] Wie nah kommen sich die beiden Flugzeuge?
[06] Unter welchem Winkel scheinen sich die Flugbahnen für einen Beobachter am Boden zu schneiden?

V.09.02 | Flugzeugaufgabe 2

Zwei Kleinflugzeuge bewegen entlang der Geraden:

$$f_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 540 \\ 740 \\ 180 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ -820 \\ -30 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(Längeneinheiten in Metern, Zeiteinheiten in Sekunden ab Messbeginn)

[01] Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der Flugzeuge.
[02] Wann sind die beiden Flugzeuge vom Boden gestartet?
[03] Wann befindet sich das zweite Flugzeug auf einer Höhe von 250m? Wie weit ist es zu diesem Zeitpunkt vom anderen Flugzeug entfernt?
[04] Bestimmen Sie den Steigungswinkel des ersten Flugzeugs.
[05] Zeigen Sie, dass die Flugzeuge nicht kollidieren, obwohl sich die Flugbahnen kreuzen.
[06] Wie nah kommen sich die beiden Flugzeuge?

V.09.03 | Senkrechte Projektionen

Bestimmen Sie die senkrechte Projektion vom Punkt A und der Gerade g auf die angegebene Koordinatenebene.

[01] A(3|4|1) und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die x_1-x_3-Ebene.

[02] A(3|4|1) und $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die x_2-x_3-Ebene.

V.09.04 | Schattenaufgaben (schiefe Projektionen)

Bestimmen Sie die senkrechte Projektion vom Punkt A und der Gerade g auf die angegebene Koordinatenebene.

[01] Im Punkt B(4|1|0) befindet sich ein 6m hoher Mast, der von einer Lampe beschienen wird, die sich im Punkt L(6|-5|9) befindet. Wie lang ist der entstehende Schatten ?

[02] Im Punkt B(4|1|0) befindet sich ein 6m hoher Mast. Aus der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ fällt Sonnenlicht auf den Mast. Wie lang ist der entstehende Schatten ?

[03] Eine 12m hohe quadratische, senkrechte Pyramide mit den Eckpunkten der

Grundfläche in A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0) und D(0|8|0) wird nachts von einem Strahler beleuchtet, der sich im Punkt L(2|12|0) befindet. Die Pyramide wirft einen Schatten auf eine in der x_2x_3-Ebene liegende Wand. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Schattens.

V.09.05 | Umkugel

[01] Die Punkte A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und S(4|4|12) bilden eine quadratische, senkrechte Pyramide.
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Umkugel.

[02] Die Punkte A(4|3|-1), B(2|-1|3), C(6|1|7), D(8|5|3) und S(-1|8|6) bilden eine quadratische, senkrechte Pyramide.
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Umkugel.

V.09.06 | Inkugel

[01] Die Punkte A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und S(4|4|12) bilden eine quadratische, senkrechte Pyramide.
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Inkugel.

[02] Die Punkte A(4|3|-1), B(2|-1|3), C(6|1|7), D(8|5|3) und S(-1|8|6) bilden eine quadratische, senkrechte Pyramide.
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Inkugel.

V.10 Beweise

V.10.01 | Lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit

[01] Sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ linear unabhängig ?

[02] Sind die Vektoren $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig ?

[03] Für welches a sind $\vec{g}=\begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix}$, $\vec{h}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{i}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ linear unabhängig ?

V.10.02 | Teilverhältnisse

[01] In welchem Verhältnis teilt der Punkt T(4|3|6) die Strecke $\overline{AB}$ mit A(2|2|7) und B(8|5|4)?

[02] P(a|2|b) teilt die Strecke $\overline{MN}$ im Teilverhältnis r. Bestimmen Sie den Wert für r sowie die Koordinaten von P, wenn die Koordinaten der Punkte M und N lauten: M(0|-1|3) bzw. N(6|5|3).

[03] Gegeben sind A(-1|6|3) und B(3|-2|1). Der Punkt Q teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 1:3. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q.

[04] Gegeben sind die Punkte G, A(1|2|3) und B(π|π^2|π^3) sowie das Teilverhältnis TV(AGB)=2. Bestimmen Sie das Verhältnis von $\overline{GB}$ zu $\overline{BA}$!

V.10.03 | geschlossener Vektorzug

[01] Im Parallelogramm ABCD teilt N die Strecke AB im Verhältnis 1:2,
P teilt CD im Verhältnis 1:3 und M teilt DA im Verhältnis 1:4.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecken NP und BM?

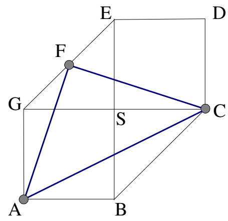
[02] Im Dreieck ABC teilt N die Strecke AB im Verhältnis 1:2, M halbiert BC, P teilt AC im Verhältnis 2:1. Die Strecken PN und AM schneiden sich in S. Bestimmen TV(ASM) sowie TV(PSN).

V.10.04 | Beweise über´s Skalarprodukt

[01] Beweisen Sie, dass in einer Raute (=Rhombus) die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

[02] Beweisen Sie den Satz des Thales (jeder Winkel im Halbkreis ist 90°)

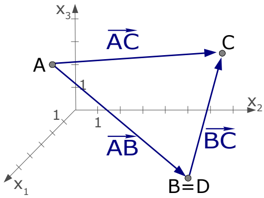
[03] In nebenstehender Figur sind ABSG und SCDE zwei Quadrate. F ist der Mittelpunkt der Strecke GE. Zeigen Sie, dass das Dreieck ACF rechtwinklig und gleichschenklig ist.



Lösungen der Aufgaben

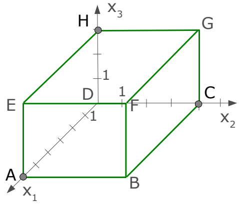
[V.01.01]

[01]



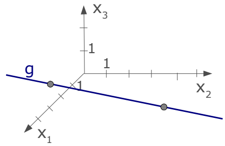
$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

[02]



B(6|4|0), D(0|0|0)
E(6|0|3), F(6|4|3)
G(0|4|3)

[03]

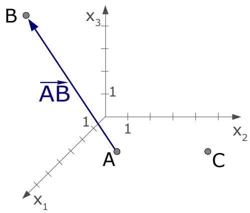


[V.01.02]

[01] $M_{AB}(5|-0{,}5|4)$
$S(3|1|2)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$



[02] $M_{PQ}(5|-0{,}5|4)$
$M_{PR}(1|3|-1)$
$M_{QR}(3|0{,}5|3)$
$S(3|1|2)$

[V.01.03]

[01] $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder ...

$g_{CD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $g_{CD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder ...

[02] $g_{PQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $g_{PQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder ...

$g_{RS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $g_{RS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder ...

[V.01.05]

[01] $E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder $E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder ...

[02] $E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ oder $E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ oder ...

[03] $E_{Pg}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder $E_{Pg}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder ...

[04] $E_{Ph}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $E_{Ph}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder ...

[05] $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ oder ...

[06] $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder ...

[07] $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-8\end{pmatrix}$ oder $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\8\end{pmatrix}$ oder ...

[8] $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-3\end{pmatrix}$ oder $E_{g,h}: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix}$ oder ...

[V.01.06]
[01], [04], [07]: $-2x_1-2x_2+x_3=-6$ (oder Vielfache)
[02], [05], [08]: $6x_1+2x_2+3x_3=12$ (oder Vielfache)
[03], [06], [09]: $-2x_1+5x_2+3x_3=16$ (oder Vielfache)

[V.01.07]
[01] $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ (oder viele andere Varianten)

[02] $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$ (oder viele andere Varianten)

[03] $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1/4\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1/4\\-1/3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1/4\\0\\-1/2\end{pmatrix}$ (oder viele andere Varianten)

[04] $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$ (oder viele andere Varianten)

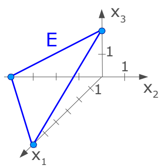
[05] $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$ (oder viele andere Varianten)

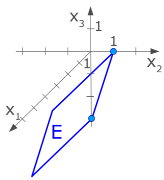
[V.01.08]
[01] $E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = 0$ [02] $E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix} = 0$ [03] $E: \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = 0$

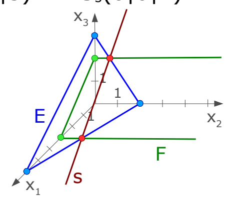
[V.01.09]
[1] S_{12} --- $S_{13}(5|0|2)$ $S_{23}(0|10|2)$
[2] S_{12} $(0|2|0)$ S_{13}--- $S_{23}(0|2|0)$
[3] S_{12} $(-5|-2|0)$ $S_{13}(-4|0|2)$ $S_{23}(0|8|10)$
[4] S_{12} $(-1|2|0)$ $S_{13}(-3|0|-3)$ $S_{23}(0|3|1{,}5)$

[V.01.10]
[01] $S_1(6|0|0)$ $S_2(0|-4|0)$ $S_3(0|0|2)$
[02] $S_1(6|0|0)$ $S_2(0|2|0)$ $S_3(0|0|3)$
[03] $S_1(-3|0|0)$ S_2--- $S_3(0|0|2)$
[04] S_1--- $S_2(0|1|0)$ $S_3(0|0|-3)$

[V.01.11]
[01] $S_1(6|0|0)$ [02] S_1--- [3] E:$S_1(6|0|0)$ F:$S_1(3|0|0)$
$S_2(0|-4|0)$ $S_2(0|1|0)$ $S_2(0|2|0)$ S_2 ---
$S_3(0|0|2)$ $S_3(0|0|-3)$ $S_3(0|0|3)$ $S_3(0|0|2)$







[V.02.01]
[01] g und h sind windschief
[02] g und h schneiden sich in S(1|2|3)
[03] g und h sind parallel
[04] g und h sind identisch

[V.02.02]
[01] E und g schneiden sich in S(3|3|3)
[02] E enthält g
[03] E und g sind parallel

[V.02.03]
[01] E_1 und E_2 sind parallel [02] E_1 und E_2 sind identisch
[03] E_1 und E_2 schneiden sich in $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$
[04] E_1 und E_2 schneiden sich in $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\10\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}$

[V.03.01]
[01] d(A,B)=3 [02] d(C,D)=7 [03] $d(P,Q)=\sqrt{67}$

[V.03.02], [V.03.03], [V.03.04], [V.03.05]
[01] $d(A,g)=\sqrt{3}\approx 1{,}732$ [02] d(P,g)=6 [03] d(Z,g)=9

[V.03.06]
[01] d(E,P)=9 [02] d(E,P)=7 [03] d(E,P)=3

[V.03.07]
[01] d(E,P)=9 [02] d(E,P)=7 [03] d(E,P)=3

[V.03.08]
[01] $d(g,h)=\sqrt{76}\approx 8{,}72$ [02] d(E,g)≈8,43 [03] $d(E_1,E_2)=6$

[V.03.09], [V.03.10]
[01] d(g,h)=7 [02] d(g,h)=6 [03] $d(g,h)=\sqrt{3}\approx 1{,}732$

[V.04.01]
[01] A*(-2|1|-5), $g^*:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$
[02] B*(-4|2|3), $h^*:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\-6\end{pmatrix}$
[3] C*(3|5|-1), $i^*:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$

[V.04.02]
[01] A*(9|7|2) [02] A(4|3|1) [03] P*(-3|5|4)

[V.04.03]
[01] P(-5|-2|7) [02] B*(9|7|4) [03] P*(-2|-2|-9)

[V.04.04]
[01] P*(8|-9|-8) [02] Q*(0|13|0) [03] R*(0|8|15)

[V.05.01]
[1] $\alpha\approx40{,}37°$ [2] $\alpha\approx21{,}04°$ [3] $\alpha=0°$ [04] $\alpha\approx79{,}02°$
[5] $\alpha\approx43{,}88°$, $\beta\approx76{,}70°$, $\gamma\approx59{,}42°$ [6] $\alpha=\gamma\approx103{,}77°$, $\beta=\delta\approx76{,}23°$

[V.05.02]
[01] $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ [02] $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ [03] $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$

[V.05.03]
[01] $\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\-8\\-8\end{pmatrix}\mathrel{\hat=}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ [02] $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\mathrel{\hat=}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ [03] $\vec{n}=\begin{pmatrix}24\\-46\\-8\end{pmatrix}\mathrel{\hat=}\begin{pmatrix}12\\-23\\-4\end{pmatrix}$
[04] $A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{381}\approx9{,}76$ [05] $A=12$
[06] $V=3$ [07] $V=\frac{343}{3}\approx114{,}3$

[V.05.04]
[01] D(5|0|6) [02] A(6|-2|1) [03] C(2|10|6)

[V.05.05]
[01] P liegt im Inneren [02] P liegt nicht im Inneren
[03] D liegt im Inneren [04] D liegt im Inneren

[V.05.06]
[01] $A_\Delta=18$ [02] $A_\Delta\approx13{,}856$ [03] $A_\Delta=9$

[V.05.07]
[01] $A_\Delta\approx40{,}389$ [02] $A_\Delta\approx27{,}31$ [03] $A_\Delta=24{,}5$

[V.06.01]
[01] $(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=25$ [02] $(x_1-7)^2+(x_2-4)^2=169$
[03] Kreis wird beschrieben mit M(-3|2) und r=2.

[V.06.02]
[01] Zwei Schnittpunkte: $S_1(0|3)$ $S_2(-1|2)$
[02] Zwei Schnittpunkte: $S_1(2|10)$ $S_2(4|8)$
[03] Zwei Schnittpunkte: $S_1(-7|-4)$ $S_2(-14|3)$

[V.06.03]
[01] Schnittgerade: $s:y=-2x+7$, Zwei Schnittpunkte: $S_1(1|5)$ $S_2(3|1)$
[02] Schnittgerade: $s:y=x$, Zwei Schnittpunkte: $S_1(0|0)$ $S_2(1|1)$
[03] Schnittgerade: $s:y=\frac{2}{3}x+2$ Zwei Schnittpunkte: $S_1(0|2)$ $S_2(6|6)$

[V.06.04]
[01] d=6 P liegt außerhalb [02] d=0, P liegt auf K
[03] d≈3,2 P liegt innerhalb

[V.06.05]
[01] $d=4\sqrt{2}-3\approx2{,}66$ [02] $d=4\sqrt{5}-5\approx3{,}94$ [03] d=0 (g berührt K)

[V.06.06]
[01] d=0 (K_1 berührt K_2) [02] K_1 schneidet K_2 [03] d≈2,06

[V.06.07]
[01] $K: (x_1-3)^2+(x_2-4)^2+(x_3-5)^2=36$
[02] $K: (x_1-1)^2+(x_2-3)^2+(x_3+5)^2=29$
[03] Es ist eine Kugel. $K: (x_1-1)^2+(x_2+2)^2+(x_3-4)^2=1$

[V.06.08]
[01] $S_1(2|-2|4)$, $S_2(1|-2|3)$
[02] keine Schnittpunkte
[03] Berührpunkt $B(2|0|1)$

[V.06.09]
[01] $M^*(1|2|3)$, $r^*=10$
[02] $M^*(7|7|7)$, $r^*=6$
[03] $M^*(4|5|-2)$, $r^*=3$

[V.06.10]
[01] Schnittebene: $E:4x_1-4x_2-2x_3=-10$, $M^*(1|2|3)$, $r^*=10$
[02] Schnittebene: $E:6x_1+2x_2+3x_3=5$, $M^*(-3|4|5)$, $r^*=\sqrt{15}$
[03] Schnittebene: $E:2x_1+4x_2+4x_3=-14$, $M^*\left(\frac{19}{9}\middle|\frac{11}{9}\middle|-\frac{52}{9}\right)$, $r^*\approx3{,}3$

[V.06.11]
[01] P liegt im Inneren von K
[02] P liegt außerhalb von K, $d(K,P)\approx2{,}78$
[03] P liegt genau auf K

[V.06.12]
[01] $d=\sqrt{3}-1\approx0{,}73$
[02] $d(K,g)=3$
[03] $d(K,g)=7$

[V.06.13]
[01] $d(E,K)=1$
[02] $d(E,K)=2$
[03] $d(E,K)=0$ [E und K berühren sich]

[V.06.14]
[01] $d(K_1,K_2)=1$
[02] $d(K_1,K_2)=0$ [die Kugeln berühren sich]
[03] $d(K_1,K_2)=2$

[V.06.15]
[01] Tangentialebene: $E_{Tan}: x_1-2x_2-2x_3=9$,
[02] Tangentialebene: $E_{Tan}: 2x_1-2x_2-x_3=-2$,
[03] Tangentialebene: $E_{Tan}: -3x_1-2x_2+6x_3=10$,

[V.06.16]
[01] Öffnungswinkel $\alpha=33{,}7°$, $r=1{,}92$
[02] $r=2{,}98$ $h=3{,}33$ $\Rightarrow$ $V\approx30.96$
[03] Öffnungswinkel $\alpha=38{,}94°$ $r\approx2{,}83$ $M=75{,}48$

[V.06.17]
[01] Öffnungswinkel: $\alpha=70{,}53°$ Polarebene: $E_P: x_1+x_2+x_3=2$,
[02] Öffnungswinkel: $\alpha=83{,}6°$ Polarebene: $E_P: 2x_1+x_2-2x_3=14$,
[03] Polarebene: $E_P: 7x_1-4x_2+7x_3=-52$

[V.07.01]
[01] $V_{Pyr}=12$
[02] $V_{Pyr}=36$
[03] $V_{Pyr}=27$

[V.07.02]
[01] $V_{Pyr}=96$ [02] Spitzen: $S_1(4|4|6)$, $S_2(4|4|-6)$
[03] $A(2|-2|0)$ $B(2|2|0)$ $C(-2|2|0)$ $D(-2|-2|0)$ [04] $V_{Pyr}=108$

[V.07.03], [V.07.04]
[01] $V_{Pyr}=13{,}5$ [02] $V_{Pyr}=85{,}33$ [03] $V_{Pyr}=12$

[V.08.01]
[01] $t=2$ $(E_2: 4x_1+2x_2+2x_3=6)$
[02] $t_1=1$ $(E_1: 2x_1+1x_2+2x_3=5)$
$t_2=3$ $(E_3: 6x_1+3x_2+2x_3=7)$
[03] $t=0$ $(E_0: 3x_2=4)$
[04] Schnittgerade: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$
[05] $E_{gesucht}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ (←mehrere Formen dieser Ebene sind möglich!)

[V.08.02]
[01] $r_1\approx1{,}81 \Rightarrow P_1(4{,}05|9{,}86|-3{,}24)$
$r_2=0 \Rightarrow P_2(-5|-1|4)$
[02] $r_1=0 \Rightarrow P_1(3|4|-6)$;
$r_2=9 \Rightarrow P_2(21|-32|12)$

[V.08.03]
[01] $r_1=0 \Rightarrow P_1(3|1|4)$;
$r_2=2 \Rightarrow P_2(1|5|6)$
[02] $r_1=0 \Rightarrow P_1(1|0|2)$;
$r_2=4 \Rightarrow P_2(5|-4|6)$
[03] $P_1(9|13|12)$, $P_2(-1|-7|-8)$

[V.08.04]
[01] parallel: $ü={}^1/_3$.
g in E : unmöglich
Schnittpkt: $ü\neq{}^1/_3$.
[02] parallel: a=4.
g in E : unmöglich
Schnittpkt: $a\neq4$.
[03] parallel: unmöglich.
g in E : unmöglich
Schnittpkt: immer.

[V.08.05]
[01] $r_1=0 \Rightarrow P_1(3|1|4)$;
$r_2={}^1/_3 \Rightarrow P_2({}^8/_3|{}^5/_3|{}^{13}/_3)$
[02] keine Lösung

[V.08.06]
[01] $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ (←mehrere Formen dieser Ebene sind möglich!)
[02] Schnitt für k=2

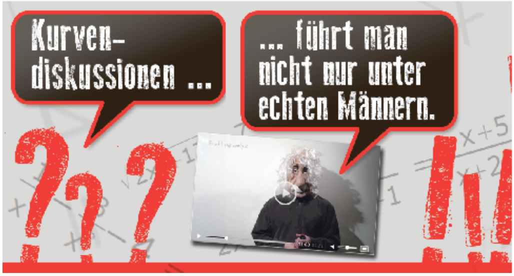
[V.09.01]
[01] $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\12\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\1\end{pmatrix}$, $f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\9\\9\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}12\\-5\\0\end{pmatrix}$ [02] $v_1=9$, $v_2=13$
[03] $t=9$ [04] $d=2{,}69$ [05] $d=9{,}53$ [06] $\alpha=3{,}9°$

[V.09.02]
[01] $v_1=54\,{}^m/_s$ $v_2=30\,{}^m/_s$ [02] $t_1=-30$ Sek $t_2=7$ Sek
[03] $t=70$ Sek $d=2{,}8$ km [04] $t_1=-30$ Sek $t_2=7$ Sek

[V.10.01]
[01] linear abhängig [02] linear unabhängig
[03] für a=3: linear abhängig, für $a\neq3$: linear unabhängig

[V.10.02]
[01] AT:TB = 1:2 [02] Q(0|4|2,5) [03] GB:BA = 1:3

[V.10.03]
[01]
[02] AS:SM = 4:5 PS:SN = 2:1



Damit die Mathe-Seite.de kostenlos bleiben kann, braucht sie deine Hilfe!

facebook.com/matheseite

Bitte empfiehl die Mathe-Seite deinen Freunden.