W.17 Hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung wendet man an, wenn es um Ziehen ohne Zurücklegen geht. Wenn man mehrere Gruppen hat und aus jeder dieser Gruppe soll eine bestimmte Anzahl von Elementen entnommen werden. Den Namen „hypergeometrische Verteilung" müssen Sie nicht kennen, aber die Vorgehenweise lohnt sich zu merken. Da man die Berechnung der Lotto-Wahrscheinlichkeit mit ebenfalls dieser Theorie durchführt, ist hierfür auch der Name „Lotto-Problem" gängig.

Bsp.1

In einem Korb befinden sich 8 Äpfel und 4 Birnen. Ella entnimmt 5 Früchte. Wenn die Entnahme zufällig erfolgt, mit welcher W.S. sind genau 3 Äpfel und 2 Birnen dabei?

Lösung [kurz, ohne viel Erläuterungen]:

Es gibt zwei Gruppen, aus jeder Gruppe werden ein paar Elemente [ohne Zurücklegen] entnommen. Damit haben wir es hier mit der hypergeometrischen Verteilung zu tun. Wir ziehen 3 Äpfel aus der Gruppe der 8 Äpfel und wir ziehen 2 Birnen aus der Gruppe der 4 Birnen. Insgesamt ziehen wir 5 Früchte aus der Gruppe der insgesamt 12 Früchte. Damit erfolgt die Berechnung der W.S. über drei Binomialkoeffizienten.

$$P(3\text{Ä}, 2B) = \frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{12}{5}} \approx 0{,}424 \mathrel{\widehat{=}} 42{,}4\%$$

Bsp.2

Aus einer Klasse mit 12 Mädels und 9 Jungs, wird ein sechsköpfiger Ausschuss gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausschuss genau zur Hälfte aus Jungs besteht ?

Lösung [mit Erläuterungen]:

Die Definition der WS. lautet ja: $P(x) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Gesamtanzahl aller Möglichkeiten}}$ [1]

Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten, ist bei uns die Anzahl der Möglichkeiten einen 6-köpfigen Ausschuss zu bilden, der aus 3 Jungs und 3 Mädels besteht. Das sind $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}$ [siehe →W.12.02]. Die Gesamtanzahl aller Möglichkeiten einen 6-köpfigen Ausschuss zu bilden ist $\binom{21}{6}$.

$$\Rightarrow\ P(3J,3M) = \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}}{\binom{21}{6}} = \frac{18480}{54264} \approx 0{,}341 \mathrel{\widehat{=}} 34{,}1\%$$

1 Falls Sie das bisher nicht gewusst haben, wäre es besser sich das zu merken.

Bsp.3

In einer Urne befinden sich 8 rote, 11 blaue und 9 grüne Kugeln. Es werden 6 Kugeln mit einem Griff gezogen. Wie hoch ist die WS., dass genau eine rote, zwei blaue und drei grüne dabei sind?

Lösung:

Wir betrachten das Ganze farbenweise: Wir müssen *eine* rote aus der Gruppe der *acht* roten ziehen. Das sind $\binom{8}{1}$. Dann müssen wir *zwei* blaue aus der Gruppe der *elf* blauen ziehen. Das sind $\binom{11}{2}$. Zum Schluss ziehen wir die *drei* grünen aus der Gruppe der *neun* grünen. Das sind $\binom{9}{3}$.

Es gibt also $\binom{8}{1}\cdot\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{3}$ *Möglichkeiten* die Kugeln wie gewünscht zu ziehen.

Die *Wahrscheinlichkeit* dieses zu tun ist damit: $\dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{3}}{\binom{8+11+9}{1+2+3}} = \dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{3}}{\binom{28}{6}} \approx 0{,}098$

Bsp.4

In einer 40-er Packung mit roten, grünen, orangen und gelben Frucht-Krachern sind alle Farben gleich häufig vertreten. Nun werden 12 von den Teilen gezogen. Wie hoch ist die WS. auch wieder gleich viele von jeder Farbe zu ziehen?

Lösung:

Wir ziehen 3 aus der Gruppe der 10 roten, 3 aus der Gruppe der 10 grünen, 3 aus den 10 orangen und 3 aus den 10 gelben. Insgesamt kann man 12 aus 40 ziehen. Das ergibt eine WS. von:

$$P(\text{gleiche Anzahl aller Farben}) = P(3ro,3gr,3or,3ge) = \frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{40}{12}} \approx 0{,}037$$

Bsp.4

Lotto: Wie hoch ist die WS. vier Richtige zu tippen ?

Lösung:

Zuerst muss man selber auf die Idee kommen, die 49 Zahlen in zwei Gruppen aufzuteilen. Die 6, die sich bei der Ziehung als Richtige erweisen werden und die 43, die sich bei der Ziehung als Falsche erweisen werden.

Nun ist es einfach: Wir ziehen 4 aus der Gruppe der 6 Richtigen und 2 aus der Gruppe der 43 Falschen. Insgesamt ziehen wir 6 aus 49

$$\Rightarrow \quad P(4\text{Richtige}) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}000968 \approx 0{,}097\% \approx 0{,}1\%$$