A.19 Übersicht über die Kurvendiskussion

Der Sinn der Kurvendiskussion ist es, die
wichtigsten Eigenschaften einer Funktion zu errechnen.
Zu diesen gehören:

Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte und asymptotisches Verhalten.

Zur Kurvendiskussion gehört:

→ Bildung von drei **Ableitungen** [braucht man für Extrem- und Wendepunkte].

→ Untersuchung der Funktion auf Achsen- bzw. Punktsymmetrie.

→ Untersuchung der Funktion auf asymptotisches Verhalten.
[Wohin geht die Funktion, wenn x gegen +∞ oder -∞ läuft?]

→ Bestimmung der **Nullstellen** der Funktion [also Schnittpunkte mit der x-Achse].
Hierfür setzt man die Funktion gleich Null und löst nach „x" auf.
[Der Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse ist auch ganz nett, jedoch nicht so wichtig.]

→ Bestimmung der **Extrempunkte** der Funktion [also Hoch- und Tiefpunkte].
Hierfür setzt man die erste Ableitung Null und löst nach „x" auf.
Die erhaltenen x-Werte setzt man zweimal ein:
Zum einen in f(x) um die y-Werte zu erhalten und zum anderen in f''(x), um zu schauen, ob es sich beim Punkt um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.
[Ist das Ergebnis von f''(x) negativ, so handelt es sich um einen Hochpunkt. Ist f''(x) positiv, so handelt es sich um einen Tiefpunkt. Ist das Ergebnis von f''(x) Null, so muss man f'(x) auf Vorzeichenwechsel untersuchen.]

→ Bestimmung der **Wendepunkte** der Funktion.
Hierfür setzt man die zweite Ableitung Null und löst nach „x" auf.
Die erhaltenen x-Werte setzt man zweimal ein:
Einmal in f(x) um die y-Werte zu erhalten und das zweite Mal in f'''(x), um zu beweisen, dass es sich tatsächlich um einen Wendepunkt handelt.
[Ist das Ergebnis von f'''(x) ungleich Null, so handelt es sich tatsächlich um einen Wendepunkt. Kommt doch Null raus, muss man f''(x) auf Vorzeichenwechsel untersuchen.]

→ **Zeichnung** der Funktion. [Eventuell mit Wertetabelle]

Schematische Darstellung der Kurvendiskussion !

Ableitungen: im Normalfall drei Stück

Symmetrie: Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse ?!?

Asymptoten: senkrechte?? waagerechte bzw. schiefe?

Nullstellen: $f(x) = 0$
$\Rightarrow$ man erhält x_1 , x_2 , ...
$\Rightarrow$ $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, ..

Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 , x_2 , ...$

- in f''(x)
  ↓
  H(..|..) falls $f''(x) < 0$ oder
  T(..|..) falls $f''(x) > 0$ oder
  falls $f''(x)=0$ (1)
- in f(x) für y-Wert

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 , x_2 , ...$

- in f'''(x)
  ↓
  W(..|..) falls $f'''(x) \neq 0$
  falls $f'''(x)=0$ (2)
- in f(x) für y-Wert

Zeichnung: Ein paar Striche und Punkte zeichnen, bei Langeweile kann man sie auch bunt anmalen.

Ableitungen *(drei Stück)*
Symmetrie
Asymptoten *($x\to \pm\infty$)*
Nullstellen *($f(x)=0$)*
Extrempunkte *($f'(x)=0$)*
Wendepunkte *($f''(x)=0$)*
Zeichnung

f'(x)=0 setzen.
Die erhaltenen x-Werte setzt man zum einen in f''(x) ein. [Falls das Ergebnis positiv ist, gibt's einen Tiefpunkt, falls es negativ ist, hat man einen Hochpunkt.]
Zum anderen setzt man die x-Werte nochmal in f(x) ein, um die y-Werte zu erhalten.

f''(x)=0 setzen.
Die x-Werte, die man erhält, setzt man in f'''(x) ein. [Falls nicht Null rauskommt, ist es sicher ein Wendepunkt.]
Die x-Werte setzt man nochmal ein und zwar in f(x), um die y-Werte zu erhalten.

1 Falls bei der Überprüfung der Extrem- oder Wendepunkte Null rauskommt, handelt es sich zu 99% um einen Sattelpunkt [heißt auch Terassenpunkt]. Wenn man es genau wissen will, muss man f' auf Vorzeichenwechsel untersuchen. →Siehe weiter unten, „Beispiel 1"
2 Dieser Fall tritt in der Schule eigentlich nie ein. Theoretisch muss man jetzt f'' auf VZW untersuchen.

A.19.01 Beispiel 1

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x$

Untersuchen Sie f(x) ohne Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners auf Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie und Asymptoten.
Fertigen Sie eine Zeichnung.

Lösung auf Seite 4.

A.19.02 Beispiel 2

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{6}$

Zeigen Sie, dass f(x) bei $N_1(-2|0)$ und bei $N_2(2{,}5|0)$ Nullstellen besitzt.
Untersuchen Sie f(x) auf Extrem- und Wendepunkte, Symmetrie und Asymptoten.
Fertigen Sie eine Zeichnung.

Lösung auf Seite 6.

A.19.03 Beispiel 3

Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ sei die Funktion $f_t(x)$ gegeben mit:

$f_t(x) = \frac{1}{8t}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 8t$.

Untersuchen Sie die Kurvenschar $f_t(x)$ auf Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Symmetrie.
Fertigen Sie eine Zeichnung von $f_{0,5}(x)$.

Lösung auf Seite 8.

A.19.04 Beispiel 4

Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ sei die Funktionsschar $f_t(x)$ gegeben mit:

$f_t(x) = \frac{t^2}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2t^2}x$.

Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Symmetrie.
Fertigen Sie eine Zeichnung von $f_1(x)$.

Lösung auf Seite 10.

Lösung von A.19.01, Beispiel 1:

Ableitungen:

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{6}{2}x + 3 = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$

$f''(x) = \frac{6}{4}x - 3 = \frac{3}{2}x - 3$

$f'''(x) = \frac{3}{2}$

Symmetrie:

Es tauchen gerade und ungerade Hochzahlen auf $\Rightarrow$ *keine Symmetrie*

Asymptoten:

[Ganzrationale Funktionen haben keine Asymptoten.]

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x = 0 \quad | \cdot 4$

$x^3 - 6x^2 + 12x = 0 \quad$ x ausklammern

$x \cdot (x^2 - 6x + 12) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 6x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **$N_1(0 | 0)$**

(p-q-Formel)

$x^2 - 6x + 12 = 0$

$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 12}$

$= 3 \pm \sqrt{-3}$

(a-b-c-Formel)

$x^2 - 6x + 12 = 0$

$x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2}$

Da etwas Negatives unter der Wurzel auftaucht, gibt es keine weitere Lösung außer $x_1=0$.
Damit gibt es nur die eine Nullstelle $N_1(0|0)$.

Extrempunkte:

$f'(x) = 0$

$\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = 0 \quad | \cdot 4$

$3x^2 - 12x + 12 = 0$

(p-q-Formel)

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \quad | : 3$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}_{=}$

$= 2 \pm \sqrt{0} = 2$

(a-b-c-Formel)

$3x^2 - 12x + 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{0}}{6} = 2$

Überprüfung in f''(x):
$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0$

In der zweiten Ableitung sollte nie Null `rauskommen.
Wegen f''(2)=0 haben wir hier also ein Problem.
Wir wissen nicht, ob es sich bei x=2 um einen Hoch-, Tief- oder Wendepunkt handelt.
Wir brauchen eine Überprüfung auf Vorzeichenwechsel.

Wir merken uns, dass es sich bei x=2 um einen Sattelpunkt handeln könnte. Später, bei der Berechnung der Wendepunkte, verwenden wir das.

Überprüfung auf Vorzeichenwechsel geht so:
Ausgangslage: Es ist zu überprüfen, ob bei einem bestimmten x-Wert (nennen wir diesen x=a) ein Hoch-, ein Tiefpunkt oder keines der beiden vorliegt.

Man betrachtet zwei x-Werte:
Einen der kleiner als „a" ist und einen der größer als „a" ist.
Beide x-Werte setzt man in f'(x) ein und betrachtet die erhaltenen Vorzeichen.

Erhält man beim kleineren x-Wert was Positives und beim größeren was Negatives, befindet sich bei x=a ein **Hochpunkt**.

Erhält man beim kleineren x-Wert was Negatives und beim größeren was Positives, befindet sich bei x=a ein **Tiefpunkt**.

Erhält man beide Male was Positives oder beide Male was Negatives, handelt es sich normalerweise um einen Sattelpunkt (bzw. Terassenpunkt) (das ist ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente).

Konkret geht die Untersuchung in unserem Fall also so:
Uns interessiert, ob bei x=2 ein Extrempunkt vorliegt.
Wir suchen uns daher zwei x-Werte aus, von denen einer größer, der andere kleiner als 2 ist. Wir wählen z.B. $x_1=1$ und $x_2=3$.

Nun setzen wir diese beiden x-Werte in f'(x) ein:
$f'(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = +0{,}75$
$f'(3) = \frac{3}{4} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 3 = +0{,}75$
Wir erhalten beide Male ein positives Vorzeichen.
[der Wert „0,75" spielt keine Rolle] $\Rightarrow$ Bei x=2 liegt also *kein Extrempunkt* vor.

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \tfrac{3}{2}x - 3 &= 0 \qquad | +3 \quad | : \tfrac{3}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Überprüfung in f'''(x):
$f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \quad \Rightarrow$ ganz sicher ein Wendepunkt.
[Dass in f'''(x) gar kein x drinsteckt, in welches man x=2 einsetzen kann, spielt keine Rolle.]

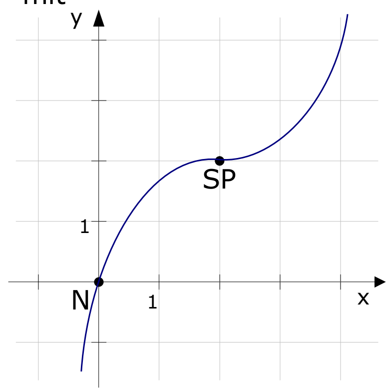
Berechnung des y-Werts:

$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = 2 \quad \Rightarrow W(\ 2 \mid 2\ )$

Bei der Berechnung der Extrempunkte erhielten wir $f'(2)=0$ (siehe Berechnung der Extrempunkte ↑). Dieses bedeutet, dass bei $x=2$ die Steigung Null ist.
Im Punkt $W(2|2)$ ist also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.
Es handelt sich somit um einen Sattelpunkt!

⇒ **SP(2 | 2)**

Zeichnung: → → →



Lösung von A.19.02, Beispiel 2:

Nullstellen:
Wenn man die Nullstellen braucht, setzt man normalerweise $f(x)=0$ und löst nach x auf.
Hier jedoch sind die Nullstellen bereits gegeben.
Also setzen wir einfach die x-Werte in die Funktion ein und sollten als y-Wert „0" erhalten.

$f(-2) = \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - (-2)^2 - \frac{5}{4}\cdot(-2) + \frac{25}{6} = \ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **N_1(-2 | 0)**

$f(2{,}5) = \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^3 - 2{,}5^2 - \frac{5}{4}\cdot 2{,}5 + \frac{25}{6} = \ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **N_2(2,5 | 0)**

Ableitungen:

$f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 2x - \frac{5}{4} = x^2 - 2x - 1{,}25$

$f''(x) = 2x-2$

$f'''(x) = 2$

Symmetrie:
Es tauchen gemischte Hochzahlen auf ⇒ *keine Symmetrie erkennbar*

Asymptoten:
keine Asymptoten.
Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$
$$x^2-2x-1{,}25 = 0$$
$$x_{1,2} = 1\pm\sqrt{1^2-(-1{,}25)}\ ^{(1)} = +1\pm1{,}5$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 2{,}5 \quad \vee \quad x_2 = -0{,}5$$

y-Werte:

$$f(2{,}5) = \frac{1}{3}\cdot2{,}5^3-2{,}5^2-\frac{5}{4}\cdot2{,}5+\frac{25}{6} = \ldots = 0$$
$$f(-0{,}5) = \frac{1}{3}\cdot(-0{,}5)^3-(-0{,}5)^2-\frac{5}{4}\cdot(-0{,}5)+\frac{25}{6} = \ldots = 4{,}5$$

Überprüfung in f''(x):

$f''(2{,}5) = 2\cdot2{,}5-2 = 3 > 0 \quad \Rightarrow$ **T(2,5 | 0)**

$f''(-0{,}5) = 2\cdot(-0{,}5)-2 = -3 < 0 \quad \Rightarrow$ **H(-0,5 | 4,5)**

Wendepunkt:

$$f''(x) = 0$$
$$2x - 2 = 0 \Rightarrow \quad x = 1$$

Überprüfung in f'''(x):

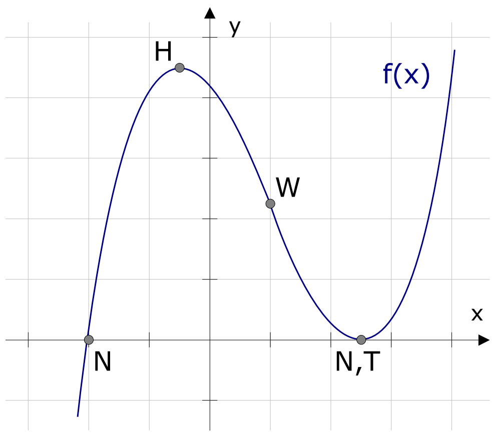
$f'''(1) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\,(\,1\mid f(1)\,)$

y-Wert:

$$f(1) = \frac{1}{3}\cdot1^3-1^2-\frac{5}{4}\cdot1+\frac{25}{6} = \ldots = 2{,}25$$

$\Rightarrow$ **W(1 | 2,25)**

Zeichnung: →



1 Statt der p-q-Formel könnte man selbstverständlich auch die a-b-c-Formel verwenden.

Lösung von A.19.03, Beispiel 3:

[$t\in\mathbb{R}^+$ bedeutet, dass der Parameter „t" alle positiven Zahlen annehmen kann. Die „0" ist in $\mathbb{R}^+$ nicht enthalten!]

Ableitungen:

$$f_t'(x) = \frac{4}{8t}x^3-\frac{10}{2}x = \frac{1}{2t}x^3-5x$$

$$f_t''(x) = \frac{3}{2t}x^2-5$$

$$f_t'''(x) = \frac{3}{t}x$$

Symmetrie:

Es tauchen nur gerade Hochzahlen auf $\Rightarrow$ *Symmetrie zur y-Achse*

Beweis der Symmetrie: Zu zeigen ist, dass gilt:

$$f_t(-x) = f_t(x)$$

$$\frac{1}{8t}(-x)^4-\frac{5}{2}(-x)^2+8t = \frac{1}{8t}x^4-\frac{5}{2}x^2+8t$$

$$\frac{1}{8t}x^4-\frac{5}{2}x^2+8t = \frac{1}{8t}x^4-\frac{5}{2}x^2+8t$$ Wahre Aussage. Bewiesen!

Asymptoten:

keine Asymptoten.

Verhalten für $x\to\pm\infty$: $x \to +\infty \Rightarrow f_t(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow f_t(x) \to +\infty$

Nullstellen:

$$f_t(x) = 0$$

$$\frac{1}{8t}x^4-\frac{5}{2}x^2+8t = 0 \qquad | \cdot 8t$$

$$x^4 - 20tx^2 + 64t^2 = 0 \qquad \text{Substitution: } x^2=z$$

$$z^2 - 20tz + 64t^2 = 0 \qquad \text{p-q-Formel oder a-b-c-Formel, etc..}$$

$$z_{1,2} = 10t\pm\sqrt{(10t)^2-64t^2} = 10t\pm6t$$

$$\Rightarrow z_1 = 16t \quad \vee \quad z_2 = 4t \qquad \text{Resubstitution: Da } z=x^2\text{, folgt:}$$

$$\Rightarrow x^2 = 16t \quad \vee \quad x^2 = 4t$$

$$\Rightarrow x_{1,2}= \pm4\sqrt{t} \quad \vee \quad x_{3,4} = \pm2\sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad N_{1,2}\left(\pm4\sqrt{t}\middle|0\right),\ N_{3,4}\left(\pm2\sqrt{t}\middle|0\right)$$

Info: Am Anfang der Aufgabenstellung steht: $t>0$. Wäre das nicht angegeben, müsste man an dieser Stelle eine Fallunterscheidung machen, denn wenn $t>0$, dann gibt es bei $4\sqrt{t}$ und $2\sqrt{t}$ keine Probleme. Wäre jedoch $t<0$, dann wäre $4\sqrt{t}$ und $2\sqrt{t}$ gar nicht definiert. [Wurzel aus was Negativem gibt's nicht.] Damit gäbe es für $t<0$ gar keine Nullstelle.

Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2t}x^3-5x = 0 \qquad | \cdot 2t$$

$$x^3 - 10tx = 0 \qquad \text{„x" ausklammern}$$

$$x\cdot(x^2 - 10t) = 0$$

$$x_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \vee \quad x^2-10t = 0 \qquad | +10t$$

$$x^2 = 10t \qquad | \sqrt{\ }$$

$$x_{2,3}= \pm\sqrt{10t}$$

$$f''(0) = \frac{3}{2t}\cdot0^2-5 = -5 < 0 \quad \Rightarrow H(\ 0\ |\ ??\ )$$

$$f''(\pm\sqrt{10t})=\frac{3}{2t}\left(\pm\sqrt{10t}\right)^2-5=\frac{3}{2t}\cdot10t-5=10<0 \quad \Rightarrow T_{1,2}(\ \pm\sqrt{10t}\ |\ ??\ )$$

y-Werte:

$f(0) = \frac{1}{8t}\cdot 0^4 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 8t = 8t \quad \Rightarrow \quad H(0 \mid 8t)$

$f(\pm\sqrt{10t}) = \frac{1}{8t}\cdot(\pm\sqrt{10t})^4 - \frac{5}{2}\cdot(\pm\sqrt{10t})^2 + 8t = \frac{1}{8t}\cdot(+10t)^2 - \frac{5}{2}\cdot(+10t) + 8t$

$= \frac{1}{8t}\cdot 100t^2 - 25t + 8t = \ldots = -4{,}5t \quad \Rightarrow \quad T_{1,2}(\pm\sqrt{10t} \mid -4{,}5t)$

Wendepunkt:

$f''(x) = 0$

$\frac{3}{2t}x^2 - 5 = 0 \qquad | \cdot 2t$

$3x^2 - 10t = 0 \qquad | +10t \quad | : 3$

$x^2 = \frac{10t}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{10t}{3}}$

Überprüfen in f'''(x):

$f'''\left(\pm\sqrt{\frac{10t}{3}}\right) = \pm\frac{3}{t}\cdot\sqrt{\frac{10t}{3}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{10t}{3}} \mid ??\right)$

y-Werte:

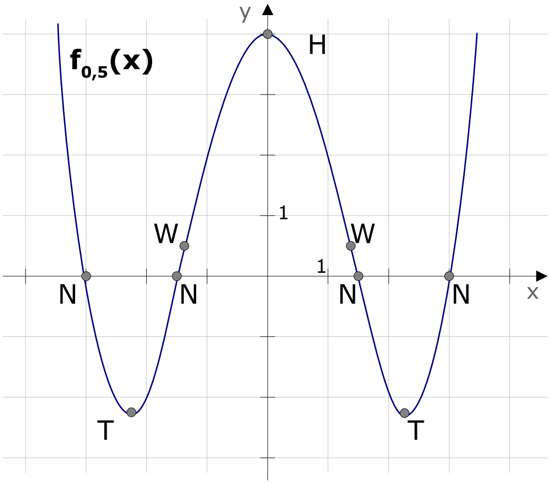
$f\left(\pm\sqrt{\frac{10t}{3}}\right) = \frac{1}{8t}\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{10t}{3}}\right)^4 - \frac{5}{2}\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{10t}{3}}\right)^2 + 8t$

$= \frac{1}{8t}\cdot\left(\frac{10t}{3}\right)^2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{10t}{3} + 8t$

$= \frac{1}{8t}\cdot\frac{100t^2}{9} - \frac{25t}{3} + 8t$

$= \frac{25t}{18} - \frac{150t}{18} + \frac{144t}{18} = \frac{19t}{18}$

$\Rightarrow \quad W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{10t}{3}} \,\middle|\, \frac{19t}{18}\right)$



Zeichnung:

Natürlich kann man die Zeichnung nur für einen bestimmten Wert von t durchführen.
Diese Zeichnung gilt für t=0,5.

Lösung von A.19.04, Beispiel 4:

Ableitungen:

$f'(x) = \frac{3t^2}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2t^2}$

$f''(x) = 3t^2x - 6$

$f'''(x) = 3t^2$

Symmetrie:

Es tauchen gemischte Hochzahlen auf ⇒ *keine Symmetrie erkennbar*

Asymptoten:

keine Asymptoten.

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$\frac{t^2}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2t^2}x = 0$ „x" ausklammern

$x \cdot \left(\frac{t^2}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2t^2}\right) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{t^2}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2t^2} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{t^2} \quad \Rightarrow \quad N_1(\,0 \mid 0\,)$

$x^2 - \frac{6}{t^2}x + \frac{9}{t^4} = 0$ p-q-Formel oder a-b-c-Formel, etc..

$x_{2,3} = \frac{3}{t^2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{t^2}\right)^2 - \frac{9}{t^4}} = \frac{3}{t^2} \pm \sqrt{0} = \frac{3}{t^2} \quad \Rightarrow \quad N_{2,3}\left(\frac{3}{t^2} \;\middle|\; 0\right)$

Extremstellen:

$f'(x) = 0$

$\frac{3t^2}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2t^2} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3t^2}$

$x^2 - \frac{4}{t^2}x + \frac{3}{t^4} = 0$

$x_{1,2} = \frac{2}{t^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 - \frac{3}{t^4}} = \frac{2}{t^2} \pm \sqrt{\frac{4}{t^4} - \frac{3}{t^4}} = \frac{2}{t^2} \pm \sqrt{\frac{1}{t^4}} = \frac{2}{t^2} \pm \frac{1}{t^2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{t^2} \quad x_3 = \frac{1}{t^2}$

Überprüfung in $f''(x)$:

$f''\left(\frac{3}{t^2}\right) = 3\cancel{t^2} \cdot \frac{3}{\cancel{t^2}} - 6 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{3}{t^2} \mid ??\right)$

$f''\left(\frac{1}{t^2}\right) = 3\cancel{t^2} \cdot \frac{1}{\cancel{t^2}} - 6 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad H\left(\frac{1}{t^2} \mid ??\right)$

y-Werte:

$f\left(\frac{3}{t^2}\right) = \frac{t^2}{2} \cdot \left(\frac{3}{t^2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{t^2}\right)^2 + \frac{9}{2t^2} \cdot \frac{3}{t^2}$

$= \frac{t^2}{2} \cdot \frac{27}{t^6} - 3 \cdot \frac{9}{t^4} + \frac{27}{2t^4} = \frac{27}{2t^4} - \frac{54}{2t^4} + \frac{27}{2t^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad T\left(\frac{3}{t^2} \;\middle|\; 0\right)$

$$f\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \frac{9}{2t^2}\cdot\frac{1}{t^2}$$
$$= \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t^6} - 3\cdot\frac{1}{t^4} + \frac{9}{2t^4} = \frac{1}{2t^4} - \frac{6}{2t^4} + \frac{9}{2t^4} = \frac{4}{2t^4} = \frac{2}{t^4} \quad \Rightarrow \quad H\left(\frac{1}{t^2}\,\middle|\,\frac{2}{t^4}\right)$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = 0$$
$$3t^2x - 6 = 0 \qquad | +6 \quad | : 3t^2$$
$$x = \frac{6}{3t^2} = \frac{2}{t^2}$$

Überprüfung in $f'''(x)$

$$f'''\left(\frac{2}{t^2}\right) = 3t^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{2}{t^2} \mid ??\right)$$

$$f\left(\frac{2}{t^2}\right) = \frac{t^2}{2}\cdot\left(\frac{2}{t^2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 + \frac{9}{2t^2}\cdot\frac{2}{t^2}$$
$$= \frac{t^2}{2}\cdot\frac{8}{t^6} - 3\cdot\frac{4}{t^4} + \frac{9}{t^4} = \frac{4}{t^4} - \frac{12}{t^4} + \frac{9}{t^4} = \frac{1}{t^4} \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{2}{t^2}\,\middle|\,\frac{1}{t^4}\right)$$

Zeichnung:

(für t=1) →