

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen
finden, die nicht aus dem Internet herunter
geladen werden können.

Dazu gehören:

Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches
(und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie
die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie
diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und
den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

A.23 Verschieben, Strecken, Spiegeln

A.23.01 Verschieben (fff)

Funktionen kann man in x-Richtung und in y-Richtung verschieben.

Verschiebung in positive x-Richtung: $x \rightarrow (x-a)$.

Man verschiebt eine Funktion um „a“ **nach rechts**, indem man in $f(x)$ „x“ durch „x-a“ ersetzt.

Verschiebung in negative x-Richtung: $x \rightarrow (x+a)$.

Man verschiebt eine Funktion um „a“ **nach links**, indem man in $f(x)$ „x“ durch „x+a“ ersetzt.

Verschiebung in positive y-Richtung: $f(x) \rightarrow f(x)+b$.

Man verschiebt eine Funktion um „b“ **nach oben**, indem man zu $f(x)$ „b“ dazu addiert.

Verschiebung in negative y-Richtung: $f(x) \rightarrow f(x)-b$.

Man verschiebt eine Funktion um „b“ **nach unten**, indem man von $f(x)$ „b“ abzieht.

Aufgabe 1

$f(x) = 0,4x + \cos(2x)$ soll um „2“ nach links verschoben werden!

Aufgabe 2

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$ soll um 1 nach rechts und 4 nach oben verschoben werden!

Aufgabe 3

$f(x) = x^3-6x^2+12x-6$ wird um 2 nach links und 1 nach unten verschoben!

Lösung von Aufgabe 1:

Die gesuchte Funktion ist $f(x+2)$!

$$f(x+2) = 0,4 \cdot (x+2) + \cos(2 \cdot [x+2]) = 0,4x+0,8 + \cos(2x+4)$$

Lösung von Aufgabe 2:

Die gesuchte Funktion ist $f(x-1)+4$!

$$f(x-1)+4 = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)-1} + 4 = \frac{x^2-2x+1-4}{x-2} + \frac{4}{1} = [\text{Hauptnenner}] = \frac{x^2-2x-3}{x-2} + \frac{4x-8}{x-2} = \frac{x^2+2x-11}{x-2}$$

Lösung von Aufgabe 3:

Die gesuchte Funktion ist $f(x+2)-1$!

$$\begin{aligned} f_{\text{neu}}(x) &= f(x+2)-1 = (x+2)^3-6(x+2)^2+12(x+2)-6-1 \\ &= (x^3+6x^2+12x+8) - 6(x^2+4x+4) + 12(x+2) - 7 \\ &= x^3+6x^2+12x+8 - 6x^2-24x-24 + 12x+24 - 7 = x^3+1 \end{aligned}$$

A.23.02 Strecken (fff)

Funktionen kann man in x-Richtung und in y-Richtung strecken.

Ist der Streckfaktor zwischen 0 und 1, nennt man den Vorgang stauchen. Das Stauchen ist mathematisch gesehen, nicht sonderlich wichtig, denn der Faktor beim Stauchen ist einfach nur der Kehrwert beim Strecken. [Will man beispielsweise um den Faktor „3“ stauchen, so streckt man einfach mit dem Faktor $\frac{1}{3}$].

Ist der Streckfaktor negativ, so hat man einfach den Fall, dass die Streckung noch zusätzlich mit einer Spiegelung an der Achse verbunden ist.

Strecken in y-Richtung: $f(x) \rightarrow k \cdot f(x)$.

Bei einer **Streckung in y-Richtung**

wird die Funktion mit dem Streckfaktor multipliziert.

Strecken in x-Richtung: $x \rightarrow \left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$.

Bei einer **Streckung in x-Richtung**

wird „x“ mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert.

Aufgabe 4

Strecken Sie $f(x) = 2(x+3)^5 - 4x$ um den Faktor 2 in y-Richtung.

Aufgabe 5

$f(x) = 0,4x + \cos(2x)$ soll um den Faktor 5 in y-Richtung gestaucht werden.

Aufgabe 6

$f(x) = x^3 + 2x^2 - e^{3x}$ soll um den Faktor 3 in x-Richtung gestreckt werden.

Aufgabe 7

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ soll um den Faktor 2 in x-Richtung gestaucht werden.

Lösung von Aufgabe 4:

Bei einer Streckung in y-Richtung wird $f(x)$ mit dem Streckfaktor multipliziert.

$$\Rightarrow f_{\text{neu}}(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot [2(x+3)^5 - 4x] = 4 \cdot (x+3)^5 - 8x$$

Lösung von Aufgabe 5:

Eine Stauchung um den Faktor 5 entspricht einer Streckung um den Faktor $\frac{1}{5} = 0,2$.

Wir strecken also unsere Funktion um den Faktor 0,2 in y-Richtung.

$$f_{\text{neu}}(x) = 0,2 \cdot f(x) = 0,2 \cdot [0,4x + \cos(2x)] = 0,08x + 0,2 \cdot \cos(2x)$$

Lösung von Aufgabe 6:

Bei einer Streckung in x-Richtung wird „x“ mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert. Wir ersetzen also jedes „x“ durch „ $\frac{1}{3}x$ “.

$$f_{\text{neu}}(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - e^{3\left(\frac{1}{3}x\right)} = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - e^x$$

Lösung von Aufgabe 7:

Eine Stauchung um den Faktor 2 entspricht einer Streckung um den Faktor $\frac{1}{2}$.

Bei einer Streckung in x-Richtung wird „x“ immer mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert. Der Kehrwert von $\frac{1}{2}$ ist 2, daher ersetzen wir also jedes „x“ durch „ $2x$ “.

$$f_{\text{neu}}(x) = f(2x) = (2x)^3 - 6(2x)^2 + 12(2x) - 6 = 8x^3 - 24x^2 + 24x - 6$$

A.23.03 Spiegeln an Koordinatenachsen (§§)

Eine Funktion $f(x)$ wird **an der x-Achse gespiegelt**, indem vor die Funktion ein „-“ gesetzt wird.

$$\text{Also: } f(x) \rightarrow -f(x)$$

Eine Funktion $f(x)$ wird **an der y-Achse gespiegelt**, indem jedes „x“ durch „-x“ ersetzt wird.

$$\text{Also: } f(x) \rightarrow f(-x)$$

Eine Funktion $f(x)$ wird **am Ursprung gespiegelt**, indem man $f(x)$ an der x-Achse und an der y-Achse spiegelt.

$$\text{Also: } f(x) \rightarrow -f(-x)$$

Aufgabe 8

$$f(x) = 2x^2 - 6$$

- Spiegeln Sie $f(x)$ an der x-Achse!
- Spiegeln Sie $f(x)$ an der y-Achse!
- Spiegeln Sie $f(x)$ am Ursprung!

Aufgabe 9

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - e^{2x}$$

- Spiegeln Sie $f(x)$ an der x-Achse!
- Spiegeln Sie $f(x)$ an der y-Achse!
- Spiegeln Sie $f(x)$ am Ursprung!

Lösung von Aufgabe 8:

a) $f(x)$ wird zu $-f(x)$.

Die gespiegelte Funktion wird also zu $f_{\text{neu}}(x) = -(2x^2-6) = -2x^2+6$.

b) $f(x)$ wird zu $f(-x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu

$$f_{\text{neu}}(x) = 2(-x)^2-6 = 2x^2-6.$$

[Man erhält wieder $f(x)$. Das ist nicht überraschend, da $f(x)$ ja symmetrisch zur y -Achse ist.]

c) Erst spiegeln wir $f(x)$ an der x -Achse, dann an der y -Achse. [Umgekehrt geht auch.]

An der x -Achse spiegeln: $f_x(x) = -f(x) = -(2x^2-6) = -2x^2+6$

An der y -Achse spiegeln: $f_{xy}(x) = f_x(-x) = -2(-x)^2+6 = -2x^2+6$

⇒ Wird $f(x)$ am Ursprung gespiegelt, erhält man also die Funktion:

$$f_{\text{neu}}(x) = -2x^2+6.$$

Lösung von Aufgabe 9:

a) $f(x)$ wird zu $-f(x)$.

Die gespiegelte Funktion wird also zu $f_{\text{neu}}(x) = -(x^3+2x^2-e^{2x}) = -x^3-2x^2+e^{2x}$.

b) $f(x)$ wird zu $f(-x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu

$$f_{\text{neu}}(x) = (-x)^3+2(-x)^2-e^{2(-x)} = -x^3+2x^2-e^{-2x}.$$

c) Erst spiegeln wir $f(x)$ an der x -Achse, dann an der y -Achse. [Umgekehrt geht auch.]

An der x -Achse spiegeln: $f_x(x) = -f(x) = -(x^3+2x^2-e^{2x}) = -x^3-2x^2+e^{2x}$

An der y -Achse spiegeln: $f_{xy}(x) = f_x(-x) = -(-x)^3-2(-x)^2+e^{2(-x)} = +x^3-2x^2+e^{-2x}$

⇒ Wird $f(x)$ am Ursprung gespiegelt, erhält man also die Funktion:

$$f_{\text{neu}}(x) = x^3-2x^2+e^{-2x}.$$

A.23.04 Spiegeln über Formel (ϕ)

$f(x)$ wird an einer **senkrechten Gerade $x=a$ gespiegelt**,

indem „ x “ durch „ $2a-x$ “ ersetzt wird.

$$\text{Also: } f(x) \rightarrow f(2a-x)$$

$f(x)$ wird an einer **waagerechten Gerade $y=b$ gespiegelt**,

indem „ $f(x)$ “ von $2b$ abgezogen wird.

$$\text{Also: } f(x) \rightarrow 2b-f(x)$$

Eine Funktion $f(x)$ wird an **einem Punkt $S(a|b)$ gespiegelt**,

indem man $f(x)$ an der $x=a$ und $y=b$ spiegelt.

$$\text{Also: } f(x) \rightarrow 2b-f(2a-x)$$

Aufgabe 10

$$f(x) = x+2x^2-e^{2x}$$

a) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $x=1$.

b) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $y=3$.

c) Spiegeln Sie $f(x)$ am Punkt $S(1|3)$.

Aufgabe 11

$$f(x) = 2(x+3)^5 - 4x$$

- a) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $x=-2$.
 b) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $y=5$.
 c) Spiegeln Sie $f(x)$ am Punkt $S(-2|5)$.

Lösung von Aufgabe 10:

- a) x wird zu $2 \cdot 1 - x = 2 - x$. Die gespiegelte Funktion wird also zu

$$f_{\text{neu}}(x) = f(2-x) = (2-x) + 2 \cdot (2-x)^2 - e^{2 \cdot (2-x)} = (2-x) + 2 \cdot (4-4x+x^2) - e^{4-2x} \\ = 2-x + 8-8x+2x^2 - e^{4-2x} = 10-9x+2x^2 - e^{4-2x}.$$

- b) $f(x)$ wird zu $2 \cdot 3 - f(x) = 6 - f(x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu

$$f_{\text{neu}}(x) = 6 - [x + 2x^2 - e^{2x}] = 6 - x - 2x^2 + e^{2x}.$$

- c) Wir spiegeln $f(x)$ an $x=1$ und an $y=3$. Wir bestimmen also

$$f_{\text{neu}}(x) = 2 \cdot 3 - f(2 \cdot 1 - x) = 6 - f(2-x) = 6 - [(2-x) + 2 \cdot (2-x)^2 - e^{2 \cdot (2-x)}] \\ = 6 - [(2-x) + 2 \cdot (4-4x+x^2) - e^{4-2x}] = 6 - [2-x + 8-8x+2x^2 - e^{4-2x}] \\ = 6 - 10 + 9x - 2x^2 + e^{4-2x} = -4 + 9x - 2x^2 + e^{4-2x}.$$

Lösung von Aufgabe 11:

- a) x wird zu $2 \cdot (-2) - x = -4 - x$. Die gespiegelte Funktion wird also zu

$$f_{\text{neu}}(x) = f(-4-x) = 2(-4-x+3)^5 - 4(-4-x) = 2(-1-x)^5 + 16 + 4x.$$

- b) $f(x)$ wird zu $2 \cdot 5 - f(x) = 10 - f(x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu

$$f_{\text{neu}}(x) = 10 - [2(x+3)^5 - 4x] = 10 - 2(x+3)^5 + 4x.$$

- c) Wir spiegeln $f(x)$ an $x=-2$ und an $y=5$. Wir bestimmen also

$$f_{\text{neu}}(x) = 2 \cdot 5 - f(2 \cdot (-2) - x) = 10 - f(-4-x) = 10 - [2(-4-x+3)^5 - 4(-4-x)] \\ = 10 - [2(-1-x)^5 + 16 + 4x] = 10 - 2(-1-x)^5 - 16 - 4x = -2(-1-x)^5 - 6 - 4x.$$

A.23.05 Spiegeln über Verschieben (§§)

Eine Spiegelung von Funktionen wird auf nur zwei Grundlagen zurückgeführt:
 Spiegelung an der x -Achse und Spiegelung an der y -Achse.

Man spiegelt eine Funktion an einer **senkrechten Gerade $x=a$** , indem man $f(x)$ um „-a“ links/rechts verschiebt, dann an der y -Achse spiegelt und dann wieder um „+a“ zurück verschiebt.

Man spiegelt eine Funktion an einer **waagerechten Gerade $y=b$** , indem man $f(x)$ um „-b“ hoch/runter verschiebt, dann an der x -Achse spiegelt und dann wieder um „+b“ zurück verschiebt.

Eine Funktion $f(x)$ wird **an einem Punkt $S(a|b)$ gespiegelt**, indem man $f(x)$ an der senkrechten Gerade $x=a$ spiegelt und anschließend an der waagerechten Gerade $y=b$.

Aufgabe 12

$$f(x) = x + 2x^2 - e^{2x}$$

- a) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $x=1$.
 b) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $y=3$.
 c) Spiegeln Sie $f(x)$ am Punkt $S(1|3)$.

Lösung von Aufgabe 12:

- a) Um an $x=1$ zu spiegeln, verschieben wir $f(x)$ zuerst um 1 nach links, dann spiegeln wir $f(x)$ an der y -Achse und zum Schluss verschieben wir $f(x)$ wieder um 1 nach rechts.

$$f(x) \text{ um eins nach links verschieben: } x \rightarrow x+1$$

$$f_1(x) = f(x+1) = (x+1) + 2 \cdot (x+1)^2 - e^{2 \cdot (x+1)}$$

$$f_1(x) \text{ an der } y\text{-Achse spiegeln: } x \rightarrow -x$$

$$f_2(x) = f_1(-x) = (-x+1) + 2 \cdot (-x+1)^2 - e^{2 \cdot (-x+1)}$$

$$f_2(x) \text{ um eins nach rechts zurück verschieben: } x \rightarrow x-1$$

$$f_3(x) = f_2(x-1) = (-(x-1)+1) + 2 \cdot (-(x-1)+1)^2 - e^{2 \cdot (-(x-1)+1)}$$

$$= (-x+1+1) + 2 \cdot (-x+1+1)^2 - e^{2 \cdot (-x+1+1)} = (-x+2) + 2 \cdot (-x+2)^2 - e^{2 \cdot (-x+2)}$$

- b) Um an $y=3$ zu spiegeln, verschieben wir $f(x)$ zuerst um 3 nach unten, dann spiegeln wir $f(x)$ an der x -Achse und zum Schluss verschieben wir $f(x)$ wieder um 3 nach oben.

$$f(x) \text{ um 3 nach unten verschieben: } f(x) \rightarrow f(x)-3$$

$$f_4(x) = f(x)-3 = x + 2x^2 - e^{2x} - 3$$

$$f_4(x) \text{ an der } x\text{-Achse spiegeln: } f_4(x) \rightarrow -f_4(x)$$

$$f_5(x) = -f_4(x) = -[x + 2x^2 - e^{2x} - 3] = -x - 2x^2 + e^{2x} + 3$$

$$f_5(x) \text{ wieder um drei nach oben zurück verschieben: } f_5(x) \rightarrow f_5(x)+3$$

$$f_6(x) = f_5(x)+3 = -x - 2x^2 + e^{2x} + 3 + 3 = -x - 2x^2 + e^{2x} + 6$$

- c) Um $f(x)$ am Punkt $S(1|3)$ zu spiegeln, spiegeln wir zuerst an der Gerade $x=1$ [also um 1 nach links verschieben, dann an der y -Achse spiegeln und dann wieder um 1 nach rechts verschieben], danach an der Gerade $y=3$ [also um 3 nach unten verschieben, dann an der x -Achse spiegeln und dann wieder um 3 nach oben verschieben].

$$f(x) \text{ um eins nach links verschieben: } x \rightarrow x+1$$

$$f_1(x) = f(x+1) = (x+1) + 2 \cdot (x+1)^2 - e^{2 \cdot (x+1)}$$

$$f_1(x) \text{ an der } y\text{-Achse spiegeln: } x \rightarrow -x$$

$$f_2(x) = f_1(-x) = (-x+1) + 2 \cdot (-x+1)^2 - e^{2 \cdot (-x+1)}$$

$$f_2(x) \text{ um eins nach rechts zurück verschieben: } x \rightarrow x-1$$

$$f_3(x) = f_2(x-1) = (-(x-1)+1) + 2 \cdot (-(x-1)+1)^2 - e^{2 \cdot (-(x-1)+1)}$$

$$= (-x+1+1) + 2 \cdot (-x+1+1)^2 - e^{2 \cdot (-x+1+1)} = -x+2 + 2 \cdot (-x+2)^2 - e^{2 \cdot (-x+2)}$$

$$f_3(x) \text{ um 3 nach unten verschieben: } f_3(x) \rightarrow f_3(x)-3$$

$$f_4(x) = f_3(x)-3 = -x+2 + 2 \cdot (-x+2)^2 - e^{2 \cdot (-x+2)} - 3 = -x-1 + 2 \cdot (-x+2)^2 - e^{2 \cdot (-x+2)}$$

$$f_4(x) \text{ an der } x\text{-Achse spiegeln: } f_4(x) \rightarrow -f_4(x)$$

$$f_5(x) = -f_4(x) = -[-x-1 + 2 \cdot (-x+2)^2 - e^{2 \cdot (-x+2)}] = x+1 - 2 \cdot (-x+2)^2 + e^{2x}$$

$$f_5(x) \text{ wieder um drei nach oben zurück verschieben: } f_5(x) \rightarrow f_5(x)+3$$

$$f_6(x) = f_5(x)+3 = x+1 - 2 \cdot (-x+2)^2 + e^{2x} + 3 = x+4 - 2 \cdot (-x+2)^2 + e^{2x}$$

Wenn man Lust hat, kann man die Klammer noch auflösen zu:

$$x+4 - 2 \cdot (-x+2)^2 + e^{2x} = x+4 - 2(x^2 - 4x + 4) + e^{2x} = x+4 - 2x^2 + 8x - 8 + e^{2x} = -2x^2 + 9x - 4 + e^{2x}.$$

Blöde Sprüche

Niemand hat die Absicht eine Mauer zu errichten!
(Bob der Baumeister)

Ich habe meinem Kumpel einen Limonadenwitz erzählt.
– Fanta lustig.

Montagsmorgen unter der Dusche:
– Fast ertrunken –
! Leben am Limit !

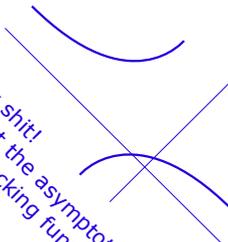
Wieviel wiegt ein Hipster ?
Ein Instagramm!

Bei manchen Leuten denk ich mir:
„Der dreht sicherlich auch das Quadrat beim Tetris!“

Eine Studie hat herausgefunden, dass Frauen,
die etwas übergewichtig sind, länger leben als
Männer, die das erwähnen.

How does NASA organize a party ?
– They plan it

Holy shit!
Look at the asymptote on that
motherfucking function!



Do you speak english ?
See I so out?

Wer sitzt im Dschungel und schummelt ?
Mogli.

Schule ist kostenlos.
Und in manchen Fällen auch umsonst.

Im Supermarkt:
Kondome: 5 Euro, Gleitgel: 5 Euro.
Das Gesicht der Verkäuferin, wenn
man noch eine Salatgurke dazu kauft:
unbezahlbar.

„Oh Gott, ich bin schwanger! Wenn ich nur wüsste von wem?“
Hausaufgabe im Fach Deutsch:
Verfasse eine Kurzgeschichte (max. 1 Seite) die die folgenden
Themen beinhaltet:
– Religion
– Sexualität
– Geheimnis.

L&K