

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen
finden, die nicht aus dem Internet herunter
geladen werden können.

Dazu gehören:

Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses
Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von
welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und
den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.

Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

mathe seite

Die gute Seite an Mathe.

A.41 Exponential-Funktionen

Exponential-Funktionen [oder auch e-Funktionen] sind Funktionen, in welchen das „x“ mindestens einmal in der Hochzahl auftaucht. [$e=2,71828\dots$]

Typisch für e-Funktionen ist, dass sie [meistens, aber nicht immer!] nur auf einer Seite [also nur links im Schaubild oder nur rechts] eine waagerechte oder schiefe Asymptote haben.

Besonders an e-Funktionen sind:

- die Ableitungen (die Hochzahl ändert sich nämlich nie)
- die Asymptotenberechnung ($e^{+\infty}=\infty$, $e^{-\infty}=0$)

Um an das „x“ in einer e-Funktion heran zu kommen, muss man normalerweise das „e“ weg kriegen. Das geht mit dem „ln“ [dem Logarithmus].

Ganz blöd und unmathematisch gesagt, ist es so, dass sich „ln“ und „e“ wegwürzen, wenn nichts dazwischen steht.

Aufgabe 1

$$e^{\ln(3)}=3; \quad e^{\ln(1,8)}=1,8; \quad 4e^{\ln(2t^2)}=4 \cdot 2t^2; \quad 2 \cdot e^{\ln(x)}=2 \cdot x$$

$$\ln(e^3)=3; \quad \ln(e^{1,8})=1,8; \quad 4 \cdot \ln(e^{2t^2})=4 \cdot 2t^2; \quad 2 \cdot \ln(e^x)=2 \cdot x$$

$$e^{\ln(A)} = A$$

$$\ln(e^A) = A$$

Was sich nicht sofort vereinfachen lässt, ist z.B.:

$$e^{2 \cdot \ln(3)}; \quad e^{\ln(1,8)+2}; \quad e^{\ln(2t^2)-2}; \quad 2 \cdot e^{5-\ln(x)} \dots$$

$$\ln(1+e^3); \quad \ln(e^{1,8}+2); \quad 4 \cdot \ln(3 \cdot e^{2t^2}); \quad 2 \cdot \ln(e^x \cdot t) \dots$$

Ab und zu braucht man Logarithmenregeln.

Eigentlich ist nur eine davon richtig wichtig.

Nämlich die, die besagt, dass man Hochzahlen im Logarithmus nach vorne ziehen kann: $\ln(A^B)=B \cdot \ln(A)$

[Meistens benötigt man die Rückwärtsrichtung davon.]

$$\ln(A^B) = B \cdot \ln(A)$$

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie den Term: $4 \cdot e^{3 \cdot \ln(x)}$

Lösung:

$$4 \cdot e^{3 \cdot \ln(x)} = [„3“ in die Hochzahl vom „ln“ ziehen] =$$

$$4 \cdot e^{\ln(x^3)} = [„e“ und „ln“ kürzen] = 4 \cdot x^3$$

A.41.01 Nullstellen (einfach) (fff)**Aufgabe 3** e-Term \pm Zahl:Bestimmen Sie die Lösung von: $4 \cdot e^{2-2x} - 36 = 0$ **Aufgabe 4** x-Term mal e-Term:Bestimmen Sie die Lösung von: $(2x-4) \cdot e^{-x+1} = 0$ **Aufgabe 5** e-Term \pm x-Term:Bestimmen Sie die Lösung von: $e^{1-2x} - 2x + 2 = 0$

Lösung von Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} \text{e-Term isolieren: } e^{2-2x} &= 9 && | \ln(\) \\ 2-2x &= \ln(9) && \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \frac{\ln(9)-2}{-2} \approx -0,1 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} &(2x-4) \cdot e^{-x+1} = 0 \\ \swarrow & \quad \searrow \\ (2x-4) &= 0 && e^{-x+1} = 0 \\ \Rightarrow x &= 2 && \text{[ein e-Term wird nie Null]} \quad \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 5:

Die Nullstellen sind nicht von Hand berechenbar.

A.41.02 Nullstellen (Herausforderung) (fff)**Aufgabe 6** e-Term \pm e-Term (beide Hochzahlen haben gleiches Vorzeichen)

Bestimmen Sie die Lösung von:

$$\text{a) } 2e^{2x} - 4e^x = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b) } e^{-x} - 2e^{-0,5x} = 0$$

Aufgabe 7 e-Term \pm e-Term (beide Hochzahlen haben verschiedene Vorzeichen)

Bestimmen Sie die Lösung von:

$$\text{a) } 2e^{2x} - 4e^{-x} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b) } e^x - 2e^{-0,5x} = 0$$

Aufgabe 8 e-Term \pm e-Term \pm ZahlBestimmen Sie die Lösung von: $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

Lösung von Aufgabe 6:

(einen der beiden e-Terme ausklammern)

$$\begin{aligned} &e^x \cdot (2e^x - 4) = 0 \\ \swarrow & \quad \searrow \\ e^x &= 0 && 2e^x - 4 = 0 \\ \text{k.Lös.} &&& e^x = 2 \\ &&& x = \ln(2) \\ &&& x \approx 0,69 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &e^{-0,5x} \cdot (e^{-0,5x} - 2) = 0 \\ \swarrow & \quad \searrow \\ e^{-0,5x} &= 0 && e^{-0,5x} - 2 = 0 \\ \text{k.Lös.} &&& e^{-0,5x} = 2 \\ &&& -0,5x = \ln(2) \\ &&& x \approx -1,38 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 7:

$$2e^{2x} - 4e^{-x} = 0$$

oder

$$e^x - 2e^{-0,5x} = 0$$

[Den Term mit der negativen Hochzahl umschreiben und die Gleichung damit multiplizieren]

$$2e^{2x} - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x$$

$$e^x - \frac{2}{e^{0,5x}} = 0 \quad | \cdot e^{0,5x}$$

$$2e^{3x} - 4 = 0 \quad | +4 \quad | :2$$

$$e^{1,5x} - 2 = 0 \quad | +2$$

$$e^{3x} = 2 \quad | \ln()$$

$$e^{1,5x} = 2 \quad | \ln()$$

$$3x = \ln(2) \quad | :3$$

$$1,5x = \ln(2) \quad | :1,5$$

$$x = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0,23$$

$$x = \frac{\ln(2)}{1,5} = \frac{2 \cdot \ln(2)}{3} \approx 0,46$$

Lösung von Aufgabe 8:

Substitution: $e^x = u$ [$\Rightarrow e^{2x} = u^2$]

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

$$u = e^x, u^2 = e^{2x}$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

← ab dieser Zeile ist's wieder „normal“ ganzrational

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-3)}$$

$$u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= 1 \pm 2$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = 3$$

statt u wieder e^x hinschreiben. (=Resubstitution)

$$u_1 = -1$$

$$e^x = -1$$

k.Lös.

$$u_2 = 3$$

$$e^x = 3$$

$$x_2 = \ln(3) \approx 1,1$$

A.41.03 Ableitungen (Basiswissen) (###)

Einen e-Term leitet man so ab:

Der e-Term bleibt unverändert stehen und die Ableitung von der Hochzahl, kommt mit „Mal“ verbunden, dazu. [Im Prinzip wendet man die Kettenregel an.]

$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x + c}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a \cdot b \cdot e^{b \cdot x + c}$$

Aufgabe 9

$$f(x) = 3e^{4x-6} + 7$$

←

$$\Rightarrow f'(x) = 3e^{4x-6} \cdot 4 = 12e^{4x-6}$$

Die „7“ fällt natürlich weg, es ist eine Zahl ohne „x“.

Die Hochzahl „4x-6“ wird zu „4“ abgeleitet und hinter (oder vor) den e-Term geschrieben.

Aufgabe 10

$$f(x) = 4e^{0,5x} - e^{2x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4e^{0,5x} \cdot 0,5 - e^{2x} \cdot 2 = 2e^{0,5x} - 2e^{2x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2e^{0,5x} \cdot 0,5 - 2e^{2x} \cdot 2 = e^{0,5x} - 4e^{2x}$$

Aufgabe 11

$$f(x) = e^{2x} \cdot (e^{-5x} + e^{2,5x})$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-3x} + e^{4,5x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3e^{-3x} + 4,5e^{4,5x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 9e^{-3x} + 20,25e^{4,5x}$$

←

Zuerst ausmultiplizieren, sonst müsste man die Produktregel anwenden. Die würde auch gehen, mit Ausmultiplizieren wird's aber einfacher.

A.41.04 Ableitungen (Herausforderung) (H)**Aufgabe 12**Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x}$ **Aufgabe 13**Bestimmen Sie zwei Ableitungen von: $g(x) = 2 \cdot e^{-x^2}$ **Aufgabe 14**Bestimmen Sie die Ableitung von: $h(x) = \frac{e^{2x}-5}{e^{2x}+2}$ **Aufgabe 15**Bestimmen Sie die Ableitung von: $k(x) = 3 \cdot \sin(1-e^{4x})$

Lösung von Aufgabe 12

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{-x} + (2x-4) \cdot (-e^{-x}) =$$

$$= [\text{Klammer auflösen}] = 2e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 4e^{-x} =$$

$$= -2x \cdot e^{-x} + 6e^{-x} = [\text{ausklammern}] = e^{-x} \cdot (-2x+6)$$

Produktregel:

$$u = 2x-4 \Rightarrow u' = 2$$

$$v = e^{-x} \Rightarrow v' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

Lösung von Aufgabe 13

$$g'(x) = [\text{Kettenregel}] = 2e^{-x^2} \cdot (-2x) = -4x \cdot e^{-x^2}$$

$$g''(x) = [\text{Produktregel}] = -4 \cdot e^{-x^2} + (-4x) \cdot (-2xe^{-x^2}) =$$

$$= -4 \cdot e^{-x^2} + 8x^2 \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (-4+8x^2)$$

Produktregel:

$$u = -4x \Rightarrow u' = -4$$

$$v = e^{-x^2} \Rightarrow v' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

Lösung von Aufgabe 14

$$h'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x}+2) - (e^{2x}-5) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} =$$

$$= \frac{2e^{4x} + 4e^{2x} - 2e^{4x} + 10e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} = \frac{14e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2}$$

Quotientenregel:

$$u = e^{2x}-5 \Rightarrow u' = e^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x}$$

$$v = e^{2x}+2 \Rightarrow v' = e^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x}$$

Lösung von Aufgabe 15

$$k'(x) = [\text{Kettenregel}] = 3 \cdot \cos(1 - e^{4x}) \cdot (-4e^{4x}) = -12e^{4x} \cdot \cos(1 - e^{4x})$$

A.41.05 Integrieren (Basiswissen) (‡‡)

Die Stammfunktion eines e-Term bestimmt man so:
Der e-Term bleibt unverändert stehen und man teilt durch die Ableitung der Hochzahl.

$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x + c}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{a}{b} \cdot e^{b \cdot x + c}$$

Aufgabe 16

$$f(x) = 3e^{4x-6} + 7$$

$$\Rightarrow F(x) = 3e^{4x-6} \cdot \frac{1}{4} + 7x = 0,75e^{4x-6} + 7x$$

Aufgabe 17

$$f(x) = 4e^{0,5x} - e^{2x}$$

$$\Rightarrow F(x) = 4e^{0,5x} \cdot \frac{1}{0,5} - e^{2x} \cdot \frac{1}{2} = 8e^{0,5x} - 0,5e^{2x}$$

Aufgabe 18

$$f(x) = e^{2x} \cdot (e^{-5x} + 3e^{2,5x})$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-3x} + 3e^{4,5x}$$

$$\Rightarrow F(x) = e^{-3x} \cdot \frac{1}{-3} + 3e^{4,5x} \cdot \frac{1}{4,5} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{3}{4,5}e^{4,5x} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{2}{3}e^{4,5x}$$

Zuerst ausmultiplizieren, da man Produkte nicht so einfach aufleiten kann.

[Nur mit Produktregel (→A.41.06)]

A.41.06 Integrieren (Herausforderungen) (‡‡)

Die Stammfunktionen von e-Funktionen werden recht schnell kompliziert, wenn man die Produktregel oder die Integration durch Substitution braucht.

In Aufgabe 19 und Aufgabe 20 sehen wir zwei Beispiele, die zwar hässlich aussehen, deren Integration aber dann doch nicht so übelst schlimm ist.

Aufgabe 21 und Aufgabe 22 wird Produktintegration [=partielle Integration], Aufgabe 23 und Aufgabe 24 wird Integration durch Substitution.

Aufgabe 19

$$f(x) = 0,5e^{-2x} \cdot (e^{3x-1} - 4)^2 \quad \text{Bestimmen Sie die Stammfunktion von } f(x).$$

(Lösung auf Seite 7)

Aufgabe 20

$$g(x) = \frac{(e^{2x} - 4)^2}{2e^x} \quad \text{Bestimmen Sie die Stammfunktion von } f(x).$$

(Lösung auf Seite 7)

Aufgabe 21

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der wunderschönen Exponentialfunktion $f(x) = (-2x+6) \cdot e^{-x+2}$ und der x-Achse im Intervall $I = [0; 3]$.

(Lösung auf Seite 7)

Aufgabe 22

$f(x) = x \cdot e^{-0,5x+1}$ Bestimmen Sie die in Unendliche reichende Fläche, die mit der x-Achse bildet.

(Lösung auf Seite 8)

Aufgabe 23

$f(x) = e^{2x+3} \cdot (e^{2x+3} - 1)^4$ Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$.

(Lösung auf Seite 9)

Aufgabe 24

$f(x) = \frac{12e^{2x}}{e^{2x}-1}$ bildet mit der x-Achse und den Geraden $x=a$ und $x=2a$ eine Fläche.

Bestimmen Sie den Parameter $a > 0$ so, dass die Fläche einen Wert von 12 annimmt.

(Lösung auf Seite 9)

Lösung von Aufgabe 19 (von Seite 6):

Wir multiplizieren einfach aus.

$$f(x) = 0,5e^{-2x} \cdot (e^{3x-1} - 4)^2 = [\text{Binom auflösen}] = 0,5e^{-2x} \cdot (e^{6x-2} - 8e^{3x-1} + 16) = \\ = [\text{ausmultiplizieren. Hochzahlen werden addiert!}] = 0,5e^{4x-2} - 4e^{x-1} + 8e^{-2x}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{0,5}{4} e^{4x-2} - \frac{4}{1} e^{x-1} + \frac{8}{-2} e^{-2x} = [\text{vereinfachen}] = \frac{1}{8} e^{4x-2} - 4e^{x-1} - 4e^{-2x}$$

Lösung von Aufgabe 20 (von Seite 6):

Hässlich an $f(x)$ ist, dass ein Bruch enthalten ist. Das Gute ist aber, dass im Nenner keine Strichrechnung enthalten ist [also kein „+“ und kein „-“]. Wir spalten daher den Bruch auf, müssen allerdings vorher oben die Klammer auflösen.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(e^{2x}-4)^2}{2e^x} = [\text{Binom auflösen}] = \frac{e^{4x}-8e^{2x}+16}{2e^x} = [\text{aufspalten}] = \frac{e^{4x}}{2e^x} - \frac{8e^{2x}}{2e^x} + \frac{16}{2e^x} = [\text{kürzen}] = \\ = \frac{1}{2} e^{3x} - 4e^x + \frac{8}{e^x} = [\text{umschreiben}] = \frac{1}{2} e^{3x} - 4e^x + 8e^{-x}$$

Nun ist die Stammfunktion einfach.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 4e^x + 8e^{-x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2 \cdot 3} e^{3x} - \frac{4}{1} e^x + \frac{8}{-1} e^{-x} = \frac{1}{6} e^{3x} - 4e^x - 8e^{-x}$$

Lösung von Aufgabe 21 (von Seite 7):

Wir brauchen das Integral $\int_0^3 (-2x+6) \cdot e^{-x+2} dx$ und für

$F(x)$ die Produktintegration [= partielle Integration].

$$\int_0^3 (-2x+6) \cdot e^{-x+2} dx = \\ = [(-2x+6) \cdot (-e^{-x+2})]_0^3 - \int_0^3 -2 \cdot (-e^{-x+2}) dx = [\text{vereinfachen}] \\ = [(2x-6) \cdot e^{-x+2}]_0^3 - \int_0^3 2e^{-x+2} dx = [\text{integrieren}]$$

Produktintegration:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

[Siehe Kapitel: → A.14.05]

$$u = -2x+6 \quad \Rightarrow \quad u' = -2$$

$$v' = e^{-x+2} \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x+2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[(2x-6) \cdot e^{-x+2} \right]_0^3 - \left[2 \cdot (-e^{-x+2}) \right]_0^3 = [\text{vereinfachen}] \\
 &= \left[(2x-6) \cdot e^{-x+2} + 2 \cdot e^{-x+2} \right]_0^3 = [\text{vereinfachen}] \\
 &= \left[(2x-4) \cdot e^{-x+2} \right]_0^3 = \left[(2 \cdot 3 - 4) \cdot e^{-3+2} \right] - \left[(2 \cdot 0 - 4) \cdot e^{-0+2} \right] = 2 \cdot e^{-1} + 4 \cdot e^2 \approx \mathbf{30,29}
 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 22 (von Seite 7):

Um überhaupt mal zu verstehen worum es im Detail geht, machen wir eine grobe Skizze. Dafür brauchen wir die Nullstellen und das Verhalten links und rechts von der Funktion [also für $x \rightarrow \pm\infty$].

$$f(x)=0 \Rightarrow x \cdot e^{-0,5x+1} = 0$$

$$x=0 \quad \vee \quad e^{-0,5x+1}=0 \quad [\text{ein } e\text{-Term kann nie Null werden}]$$

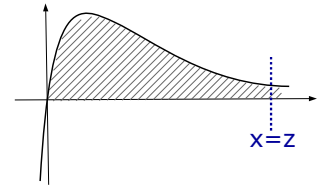
Man erhält eine einzige Nullstelle: bei $x=0$ \Rightarrow $N(0|0)$

Verhalten von $x \rightarrow \pm\infty$:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x+1}}_{\rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = \underbrace{x}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x+1}}_{\rightarrow e^{+\infty} \rightarrow \infty} \rightarrow -\infty$$

($-\infty$) \cdot ($+\infty$) $\rightarrow -\infty$



Wir haben also eine Funktion, die im Ursprung eine Nullstelle hat, links [bei $x \rightarrow -\infty$] runter [$f(x)=y \rightarrow -\infty$] geht und rechts [bei $x \rightarrow +\infty$] an die x -Achse [$f(x)=y \rightarrow 0$] geht.

Die Fläche wird links offensichtlich von $x=0$ begrenzt, rechts ist sie jedoch unbegrenzt. Wir müssen also ein sogenanntes „uneigentliches Integral“ berechnen [\rightarrow A.18.05]. Der übliche Trick, ist eine Grenze rechts einzuführen, die man irgendwie nennt, z.B. $x=z$ und zum Schluss z gegen Unendlich laufen lässt.

$$A(z) = \int_0^z x \cdot e^{-0,5x+1} dx = [\text{Produktintegration}]$$

$$= \left[x \cdot (-2) \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z - \int_0^z 1 \cdot (-2) e^{-0,5x+1} dx$$

$$= \left[-2x \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z + \int_0^z 2e^{-0,5x+1} dx$$

$$= \left[-2x \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z + \left[\frac{2}{-0,5} e^{-0,5x+1} \right]_0^z$$

$$= \left[-2x \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z + \left[-4e^{-0,5x+1} \right]_0^z = [\text{ausklammern}]$$

$$= \left[(-2x-4) \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z = \left[(-2z-4) \cdot e^{-0,5z+1} \right] - \left[(-2 \cdot 0 - 4) \cdot e^{-0,5 \cdot 0 + 1} \right]$$

$$= \left[(-2z-4) \cdot e^{-0,5z+1} \right] - \left[-4 \cdot e^1 \right] = (-2z-4) \cdot e^{-0,5z+1} + 4e$$

Nun lassen wir die rechte Grenze ins Unendliche laufen, also $z \rightarrow \infty$.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \underbrace{(-2z-4)}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5z+1}}_{\rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0} + 4 \cdot e = (-\infty) \cdot 0 + 4e = 4e$$

Produktintegration:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

[Siehe Aufgabe 21 oder Kap. A.14.05]

$$\begin{aligned}
 u &= x & v' &= e^{-0,5x+2} \\
 \Rightarrow u' &= 1 & \Rightarrow v &= -e^{-0,5x+2} \cdot \frac{1}{(-0,5)} \\
 & & &= -2 \cdot e^{-0,5x+1}
 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 23 (von Seite 7):

Die innere Ableitung der Klammer ist „ $2e^{2x+3}$ “. Bis auf die Konstante „2“ steht dieser Term vor der Klammer. Also wird Integration durch Substitution klappen.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{2x+3} \cdot (e^{2x+3}-1)^4 dx = [\text{Substitution}] = \\ &= \int e^{2x+3} \cdot (u)^4 dx = \int e^{2x+3} \cdot (u)^4 \frac{du}{u'} = \\ &= \int e^{2x+3} \cdot u^4 \frac{du}{2e^{2x+3}} = \frac{1}{2} \cdot \int u^4 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot u^5 = \\ &= \frac{1}{10} \cdot u^5 = [\text{Resubstitution}] = \frac{1}{10} \cdot (e^{2x+3}-1)^5 \end{aligned}$$

Integration durch Substitution

$$dx = \frac{du}{u'} \quad [\text{Kap. A.14.06}]$$

$$u = e^{2x+3}-1 \Rightarrow u' = 2 \cdot e^{2x+3}$$

Lösung von Aufgabe 24 (von Seite 7):

Die Fläche mit der x-Achse berechnet man natürlich mit dem Integral. $x=a$ und $x=2a$ sind die Integralgrenzen. Dass das Ergebnis den Wert 12 annehmen soll, ist uns vorerst egal.

$$\begin{aligned} A &= \int_a^{2a} \frac{12e^{2x}}{e^{2x}-1} dx = [\text{Substitution } u=e^{2x}-1] = \\ &= \int_{x=a}^{x=2a} \frac{12e^{2x}}{u} dx = [dx=du/u'] = \int_a^{2a} \frac{12e^{2x}}{u} \frac{du}{u'} = \\ &= [u'=2 \cdot e^{2x}] = \int_{x=a}^{x=2a} \frac{12e^{2x}}{u} \frac{du}{2e^{2x}} = \frac{12}{2} \cdot \int_{x=a}^{x=2a} \frac{1}{u} du = \\ &= 6 \cdot [\ln(u)]_{x=a}^{x=2a} = [\text{Resubstitution } u=e^{2x}-1] = \\ &= 6 \cdot [\ln(e^{2x}-1)]_{x=a}^{x=2a} = [6 \cdot \ln(e^{2(2a)}-1)] - [6 \cdot \ln(e^{2(a)}-1)] = \\ &= 6 \cdot \ln(e^{4a}-1) - 6 \cdot \ln(e^{2a}-1) = 6 \cdot [\ln(e^{4a}-1) - \ln(e^{2a}-1)] = \\ &= [\text{Logarithmenregel anwenden}] = 6 \cdot \ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) \end{aligned}$$

Wählt man den Nenner als „u“, so steht die Ableitung davon im Zähler.

$$u = e^{2x}-1 \Rightarrow u' = 2 \cdot e^{2x}$$

Bei Substitution gilt: $dx = du/u'$

Diese Fläche soll nun den Wert 12 annehmen

$$\Rightarrow 6 \cdot \ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) = 12$$

[Falls Sie das Glück haben sollten einen GTR oder CAS verwenden zu dürfen, können Sie diesen jetzt verwenden. Anderenfalls sollten Sie sich jetzt noch ein bisschen durchkämpfen☺.]

$$6 \cdot \ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) = 12 \quad | :6$$

$$\ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) = 2 \quad \text{Im Zähler binomische Formel anwenden.}$$

$$\ln\left(\frac{(e^{2a}-1)(e^{2a}+1)}{e^{2a}-1}\right) = 2$$

$$\ln(e^{2a}+1) = 2 \quad | e^{(\)}$$

$$e^{2a}+1 = e^2 \quad | -1$$

$$e^{2a} = e^2 - 1 \quad | \ln(\)$$

$$2a = \ln(e^2 - 1) \quad | : 2$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \ln(e^2 - 1)$$

A.41.07 Asymptoten (fff)

e-Funktionen haben im Normalfall keine **senkrechte Asymptoten**, es sei denn der e-Term steht im Nenner. In diesem Fall setzt man natürlich wieder den Nenner gleich Null und löst nach „x“ auf.

$$e^{+\infty} \rightarrow \infty$$

$$e^{-\infty} \rightarrow 0$$

Um waagerechte oder schiefe Asymptoten zu bestimmen, lässt man x gegen $\pm\infty$ laufen und guckt, was für die Funktion f(x) rauskommt.

Wichtig hierbei ist: $e^{\infty} \rightarrow \infty$, $e^{-\infty} \rightarrow 0$.

Das Hauptproblem bei Asymptoten liegt wohl darin, dass die Vorgehensweise neu und ungewohnt ist und meistens schon allein beim Namen „e-Funktion“ der Denkprozess aussetzt.

Aufgabe 25 [→siehe Aufgabe 31]

Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten von: $f(x) = 3e^{x+1}$

Aufgabe 26 [→siehe Aufgabe 32]

Bestimmung der Asymptoten von: $f(x) = e^{-3x-1} - 3$

Aufgabe 27 [→siehe Aufgabe 34, Aufgabe 49]

Asymptotisches Verhalten von: $f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x+1}$

Aufgabe 28 [→siehe Aufgabe 35]

Bestimmung der Asymptoten von: $f(x) = 2e^x - 5e^{-2x}$

Aufgabe 29 [→siehe Aufgabe 36]

Bestimmung der Asymptoten von: $f_t(x) = (e^{2x} - t)^2$

Aufgabe 30 [→siehe Aufgabe 37]

Bestimmung der Asymptoten von: $f(x) = (1-2x) \cdot e^{0,5x}$

Lösung von Aufgabe 25:

für $x \rightarrow +\infty$ geht $x+1 \rightarrow +\infty$, also wird aus $f(x) = 3e^{x+1} \rightarrow f(x) = 3e^{+\infty}$

Da $e^{+\infty} \rightarrow +\infty$, geht die Funktion gegen: $f(x) \rightarrow 3e^{+\infty} \rightarrow 3 \cdot \infty \rightarrow +\infty$

Mathematische Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot e^{x+1} = \infty$

für $x \rightarrow -\infty$ geht $x+1 \rightarrow -\infty$, also wird aus $f(x) = 3e^{x+1} \rightarrow f(x) = 3e^{-\infty}$

Da $e^{-\infty} \rightarrow 0$, geht die Funktion gegen: $f(x) \rightarrow 3e^{-\infty} \rightarrow 3 \cdot 0 = 0$

Mathematische Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \cdot e^{x+1} = 0$

In anderer Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$$

Wegen $f(x) \rightarrow 0$, ist **y=0** [die x-Achse] waagerechte Asymptote. f

Lösung von Aufgabe 26:

$$\text{Vorüberlegung: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow -3x-1 \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-3x-1} \rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow -3x-1 \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-3x-1} \rightarrow e^{+\infty} \rightarrow \infty$$

$$\text{Limes-Schreibweise: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x-1}-3 = 0-3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x-1}-3 = \infty-3 = \infty$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = e^{-3x-1}-3 \rightarrow 0-3 = -3$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = e^{-3x-1}-3 \rightarrow \infty-3 = \infty$$

⇒ waagerechte Asymptote bei **y=-3**

Lösung von Aufgabe 27:

$$\text{Vorüberlegung: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow -x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-x+1} \rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow -x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-x+1} \rightarrow e^{+\infty} \rightarrow \infty$$

$$\text{Limes-Schreibweise: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-4) \cdot e^{-x+1} = \infty \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-4) \cdot e^{-x+1} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x+1} \rightarrow \infty \cdot 0 = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x+1} \rightarrow -\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\text{Denkweise: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (2 \cdot \infty - 4) \cdot e^{-\infty} \rightarrow \infty \cdot e^{-\infty} \rightarrow \infty \cdot 0 \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (2 \cdot (-\infty) - 4) \cdot e^{(-\infty)} \rightarrow -\infty \cdot e^{+\infty} \rightarrow -\infty \cdot \infty \rightarrow -\infty$$

⇒ waagerechte Asymptote bei **y=0** (die x-Achse)

bei $0 \cdot \infty$ und bei $\infty - \infty$
überwiegt immer die e-Funktion



Lösung von Aufgabe 28:

$$\text{Vorüberlegung: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^x \rightarrow \infty \text{ und } x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-2x} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^x \rightarrow 0 \text{ und } x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-2x} \rightarrow \infty$$

$$\text{Limes-Schreibweise: } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - 5e^{-2x} = \infty - 0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - 5e^{-2x} = 0 - \infty = -\infty$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = 2e^x - 5e^{-2x} \rightarrow \infty - 0 = \infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = 2e^x - 5e^{-2x} \rightarrow 0 - \infty = -\infty$$

keine Asymptoten [es kommt nirgends eine Zahl raus]

Lösung von Aufgabe 29:

$$\text{Vorüberlegung: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{2x} \rightarrow \infty \text{ und } x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{2x} \rightarrow 0$$

$$\text{Limes-Schreibweise: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x}-t)^2 = (\infty-t)^2 = (\infty)^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x}-t)^2 = (0-t)^2 = (-t)^2 = t^2$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (e^{2 \cdot \infty} - t)^2 \rightarrow (\infty - t)^2 \rightarrow \infty^2 \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (e^{2 \cdot (-\infty)} - t)^2 \rightarrow (0 - t)^2 \rightarrow (-t)^2 \rightarrow t^2$$

waagerechte Asymptote bei **y=t²**

Lösung von Aufgabe 30:

Vorüberlegung: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{0,5x} \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{0,5x} \rightarrow 0$ Limes-Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x) \cdot e^{0,5x} = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x) \cdot e^{0,5x} = (+\infty) \cdot 0 = 0$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (1-\infty) \cdot e^{0,5 \cdot \infty} \rightarrow -\infty \cdot e^{+\infty} \rightarrow -\infty \cdot \infty \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (1+\infty) \cdot e^{0,5 \cdot (-\infty)} \rightarrow \infty \cdot e^{-\infty} \rightarrow \infty \cdot 0 \rightarrow 0$$

y=0 (also die x-Achse) ist waagerechte Asymptote

Meistens ist es so, dass man, um Asymptoten zu berechnen, einfach den e-Term weglassen kann, ebenso alles was mit „Mal“ verbunden ist. Das, was übrig bleibt, ist die Asymptote.

- Leider stimmt das nur *meistens*, nicht immer.- Diese „Eselbrücke“ zählt *nie* als Begründung!(Es stimmt dann nicht, wenn in der Funktion zwei e-Terme auftauchen, in deren Hochzahlen unterschiedliche Vorzeichen auftauchen. [z.B. $f(x)=e^{-x}+e^x$, oder siehe Aufgabe 28]).

← Nette Eselsbrücke!



Gehen wir Aufgabe 25 bis Aufgabe 30 nochmal mit dieser „Abkürzung“ durch.

Aufgabe 31 $f(x) = 3e^{x+1}$ [→siehe Aufgabe 25]Wir lassen den e-Term weg und die „3“, die mit dem e-Term mit „Mal“ verbunden ist. Es bleibt nichts übrig! Die Asymptote ist also $y=0$.**Aufgabe 32** $f(x) = e^{-3x-1}-3$ [→siehe Aufgabe 26]Wir lassen den e-Term wegfällen, die „-3“ bleibt übrig \Rightarrow die Asymptote ist: $y=-3$ **Aufgabe 33** $f(x)=3-2 \cdot e^{-x}$ [→siehe Aufgabe 47]Wir lassen den e-Term wegfällen, die „3“ bleibt übrig \Rightarrow die Asymptote ist: $y=3$ **Aufgabe 34** $f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x+1}$ [→siehe Aufgabe 27, Aufgabe 49]

Der e-Term fällt mit der Klammer „(2x-4)“ weg.

Es bleibt nichts übrig, die Asymptote ist $y=0$.

Aufgabe 35 $f(x) = 2e^x - 5e^{-2x}$ [→siehe Aufgabe 28]

Beide e-Terme fallen weg, es bleibt nicht übrig.
Die Asymptote wäre Null, was aber falsch ist.
Bei diesem Beispiel stimmt die Eselsbrücke NICHT.



Aufgabe 36 $f_t(x) = (e^{2x} - t)^2$ [→siehe Aufgabe 29]

Der e-Term fällt weg, es bleibt $(-t)^2$ übrig.
Die Asymptote ist also $y = t^2$

Aufgabe 37 $f(x) = (1 - 2x) \cdot e^{0,5x}$ [→siehe Aufgabe 30]

Der e-Term fällt mitsamt Klammer weg. Es bleibt nichts übrig. Die Asymptote ist $y = 0$.

Die Asymptotenbestimmung mit Hilfe dieser „Eselsbrücke“ ist auch sehr hilfreich bei der Bestimmung von schiefen Asymptoten.

Schiefe Asymptoten erhält man bei e-Funktionen, wenn der e-Term mit einem Term der Form „ $mx + b$ “ mit „+“ oder „-“ verbunden ist.

Aufgabe 38 $f(x) = e^{2x} + 3x$

Der e-Term fällt weg, es bleibt „ $3x$ “ übrig. $y = 3x$ ist eine Gerade. Die **schiefe Asymptote** ist **$y = 3x$** .

Aufgabe 39 $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{x+1} + 2x - 3$

Es gibt eine schiefe Asymptote bei $y = 2x - 3$

Aufgabe 40 $f(x) = 2 \cdot e^x + e \cdot x - 4$

Es gibt eine schiefe Asymptote bei $y = e \cdot x - 4$
($e \cdot x$ ist *kein* e-Term!!)

Aufgabe 41 $f(x) = e^{2x} \cdot (x + 7)$

Es gibt keine schiefe Asymptote. (Eine waagerechte bei $y = 0$)

Aufgabe 42 $f(x) = 1 + 2x + 3e^{4x}$

Es gibt eine schiefe Asymptote bei $y = 1 + 2x$

A.41.08 Asymptoten (Herausforderung) (§§)**Aufgabe 43**

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$

Aufgabe 44

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = (e^{2x} - t)^2$

Aufgabe 45

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = (3x+5) \cdot e^{-0,4x+2}$

Aufgabe 46

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = \frac{2}{0,4+0,1 \cdot e^{-0,01x}}$

Lösung von Aufgabe 43:

Es fällt auf, dass die Funktion einen Nenner hat. Deswegen gibt es eventuell senkrechte Asymptoten, denn diese berechnet man immer, indem man den Nenner Null setzt. Damit haben wir eine senkrechte Asymptote bei:

$$\text{Nenner}=0 \Rightarrow e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \mathbf{x = \ln(2)}.$$

Um waagerechte Asymptoten zu bestimmen, lässt man x gegen $+\infty$ bzw $-\infty$ laufen.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = [\text{ausklammern und kürzen}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \cdot \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 \cdot (1-0)} = 1$$

$e^{\infty} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2}{e^{\infty}} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = \frac{0}{0-2} = 0$$

Zusammengefasst:

Für $x \rightarrow +\infty$ laufen die y -Werte gegen 1 \Rightarrow waagerechte Asymptote bei $\mathbf{y=1}$.

Für $x \rightarrow -\infty$ laufen die y -Werte gegen 0 \Rightarrow waagerechte Asymptote bei $\mathbf{y=0}$.

Diese Funktion hat also zwei waagerechte Asymptoten und eine senkrechte!

Lösung von Aufgabe 44:

Vorüberlegung: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{2x} \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{2x} \rightarrow 0$

In der Limes-Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - t)^2 = (\infty - t)^2 = (\infty)^2 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - t)^2 = (0 - t)^2 = (-t)^2 = t^2$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (e^{2 \cdot \infty} - t)^2 \rightarrow (\infty - t)^2 \rightarrow \infty^2 \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (e^{2 \cdot (-\infty)} - t)^2 \rightarrow (0 - t)^2 \rightarrow (-t)^2 \rightarrow t^2$$

Es gibt eine waagerechte Asymptote bei $\mathbf{y=t^2}$.

Natürlich gibt es keine senkrechte Asymptote, da es ja keinen Nenner gibt.

Lösung von Aufgabe 45:

Vorüberlegung: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-0,4x+2} \rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-0,4x+2} \rightarrow e^{+\infty} \rightarrow \infty$

In der Limes-Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+5)e^{-0,4x+2} = (\infty) \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x+5)e^{-0,4x+2} = (-\infty) \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = (3x+5) \cdot e^{-0,4x+2} \rightarrow (\infty) \cdot e^{-\infty} \rightarrow \infty \cdot 0 = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = (3x+5) \cdot e^{-0,4x+2} \rightarrow (-\infty) \cdot e^{+\infty} \rightarrow -\infty \cdot \infty \rightarrow -\infty$$

waagerechte Asymptote bei **y=0**.

Natürlich gibt es keine senkrechte Asymptote, da es ja keinen Nenner gibt.

Lösung von Aufgabe 46:

waagerechte Asymptoten:

Vorüberlegung: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-0,01x} \rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-0,01x} \rightarrow e^{+\infty} \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) = \frac{2}{0,4+0,1 \cdot e^{-0,01x}} \rightarrow \frac{2}{0,4+0,1 \cdot 0} = \frac{2}{0,4} = 5$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = \frac{2}{0,4+0,1 \cdot e^{-0,01x}} \rightarrow \frac{2}{0,4+0,1 \cdot \infty} = \frac{2}{\infty} \rightarrow 0$$

Es gibt also zwei waagerechte Asymptoten:

Eine bei **y=5** [rechts, für $x \rightarrow \infty$] und eine bei **y=0** [links, für $x \rightarrow -\infty$].

senkrechte Asymptoten:

Den Nenner Null setzen:

$$0,4+0,1 \cdot e^{-0,01x} = 0 \quad | -0,4 \quad | :0,1$$

$$e^{-0,01x} = -4 \quad \leftarrow \text{ein e-Term kann nie negativ werden!}$$

\Rightarrow keine Lösung, also keine senkrechten Asymptoten.

A.41.09 von der Funktionsgleichung zum Schaubild (f3f)

Um das Schaubild einer Funktion zu skizzieren, funktionieren meist folgende Überlegungen:

- \rightarrow zuerst überlegt/bestimmt man die Asymptoten
- \rightarrow man bestimmt die Nullstellen [falls das umständlich ist, kann man darauf verzichten]
- \rightarrow falls es schnell geht: schauen, ob die Funktion monoton ist bzw. ob sie immer oberhalb bzw. immer unterhalb der x-Achse verläuft.
- \rightarrow in den Bereichen, in denen man immer noch keine Ahnung hat, wie die Funktion verläuft, zeichnet man einfach Punkte ein [also irgendwelche x-Werte in $f(x)$ einsetzen und die y-Werte berechnen]
- \rightarrow hoffen und beten.

Aufgabe 47

Fertigen Sie eine Skizze von $f(x)=3-2\cdot e^{-x}$.

Aufgabe 48

Skizzieren Sie die Funktion $f(x)=5\cdot e^{-0,5x^2}$.

Aufgabe 49

Skizzieren Sie die Funktion $f(x)=(2x-4)\cdot e^{-x+1}$.

Lösung von Aufgabe 47:

→Es gibt eine waagerechte Asymptote bei $y=3$ [→siehe Aufgabe 33].

→Schnittpunkt mit der y -Achse: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=3-2\cdot e^{-0}=3-2\cdot 1=1 \Rightarrow S_y(0|1)$

→Der Schnittpunkt mit der x -Achse lässt sich nicht in 5 Sekunden bestimmen, den lassen wir weg, wir brauchen ihn auch nicht wirklich.

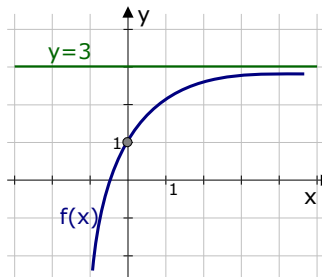
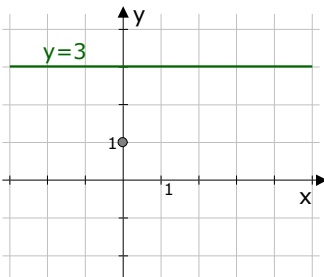
→Wir berechnen die Ableitung: $f'(x)=-2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=2e^{-x}$

Da ein e -Term *immer* positiv ist, ist $f'(x)$ immer positiv, die Funktion $f(x)$ steigt also immer.

Wir haben also folgende Infos:

Unsere Funktion hat bei $y=3$ eine waagerechte Asymptote, schneidet die y -Achse bei $y=1$ [siehe linke Grafik] und sie steigt immer.

Also muss sie in etwa so aussehen wie in der rechten Grafik.



Lösung von Aufgabe 48:

→Für $x \rightarrow \pm\infty$ geht $f(x)$ gegen Null, denn:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) = 5 \cdot e^{-0,5x^2} \rightarrow 5 \cdot e^{-0,5 \cdot \infty^2} = 5 \cdot e^{-0,5 \cdot \infty} \rightarrow 5 \cdot e^{-\infty} \rightarrow 5 \cdot 0 = 0$$

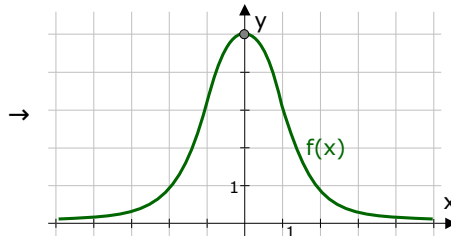
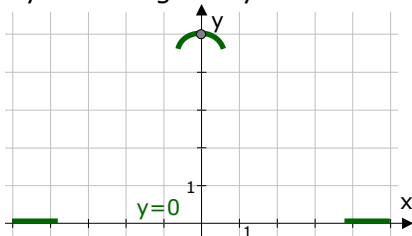
$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) = 5 \cdot e^{-0,5x^2} \rightarrow 5 \cdot e^{-0,5 \cdot (-\infty)^2} = 5 \cdot e^{-0,5 \cdot \infty} \rightarrow 5 \cdot e^{-\infty} \rightarrow 5 \cdot 0 = 0$$

[die Eselsbrücke von Seite 12 würde auch funktionieren]

→Die Funktion ist achsensymmetrisch, denn es gibt nur gerade Hochzahlen.

Deswegen muss auf der y -Achse natürlich ein Extrempunkt liegen, logischerweise mit dem x -Wert $x=0$.

Der y -Wert liegt bei $y=5\cdot e^{-0,5\cdot 0^2}=5\cdot e^0=5$



Lösung von Aufgabe 49:

→ $f(x)$ hat rechts, bei $x \rightarrow +\infty$, eine waagerechte Asymptote bei $y=0$.

Links, bei $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x)$ runter

[→Aufgabe 27, Aufgabe 34]

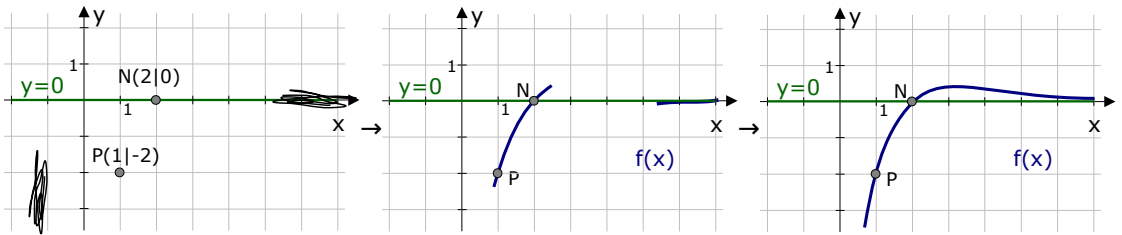
→ $f(x)$ hat eine Nullstelle bei $x=2$

denn: $(2x-4) \cdot e^{-x+1}=0$, der e-Term wird nie Null $\Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$ [siehe auch Aufgabe 4]

→ e^0 kann man immer gut ohne Taschenrechner ausrechnen, also setzt man $x=1$ in $f(x)$ ein. $x=1 \Rightarrow y=(2 \cdot 1 - 4) \cdot e^{-1+1} = (-2) \cdot e^0 = -2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow P(1|-2)$

Wir wissen also, dass die Funktion links nach unten läuft und rechts asymptotisch an die x-Achse. Bei $N(2|0)$ gibt es eine Nullstelle. Von der Nullstelle aus gesehen, muss die Funktion nach links unten laufen, denn sie muss ja zum Punkt $P(-1|2)$ hin. Von der Nullstelle wird sie vermutlich nach rechts oben laufen.

Mit all diesen Infos kann sich nach und nach zur Skizze hin arbeiten.



A.41.10 vom Schaubild zur Funktionsgleichung (fff)

Wenn von der Funktion eine Gleichung gegeben ist [in Abhängigkeit von diversen Parametern], so ist die Sache normalerweise einfach: man setzt verschiedene Punkte ein und hofft, dass man damit die Parameter bestimmen kann.

Bei e-Funktionen kann man oft noch die Asymptoten verwenden.

Aufgabe 50

Das Schaubild zeigt den Graphen der Funktion

$$f(x) = a + b \cdot e^{-0,5x}$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Lösung:

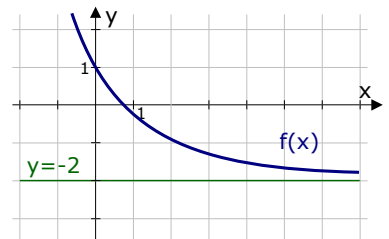
Zuerst fällt uns auf, dass der Graph eine waagerechte Asymptote bei $y=-2$ hat.

Die Gleichung der Funktion $f(x) = a + b \cdot e^{-0,5x}$ hat eine Asymptote bei $y=a$ [man lässt den e-Term weg und alles was mit „Mal“ verbunden ist]. Daher gilt: **$a=-2$**

Wir wissen also bisher, dass die Gleichung lautet: $f(x) = -2 + b \cdot e^{-0,5x}$.

Nun setzen wir noch einen Punkt in $f(x)$ ein. Der Punkt $(0|1)$ ist so ziemlich der einzige Punkt, dessen Koordinaten man gut ablesen kann. Also setzen wir die Koordinaten dieses Punktes ein:

$$x=0 \text{ und } y=1 \text{ in } f(x) = -2 + b \cdot e^{-0,5x}:$$

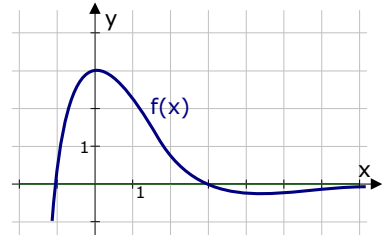


$$1 = -2 + b \cdot e^{-0,5 \cdot 0} \Rightarrow 1 = -2 + b \cdot 1 \Rightarrow 1 = -2 + b \Rightarrow \mathbf{3 = b} \Rightarrow \mathbf{f(x) = -2 + 4 \cdot e^{-0,5x}}$$

Aufgabe 51

Das rechtsstehende Schaubild beschreibt den Graph der Funktion $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$.

Bestimmen Sie die Werte von a , b und c mit Hilfe des Schaubilds.



Lösung:

Wir haben drei unbekannte Parameter $[a, b, c]$. Dafür müssen wir drei Punkte einsetzen. Man kann drei Punkte gut ablesen: $P_1(-1|0)$, $P_2(0|3)$ und $P_3(3|0)$.

$$\begin{aligned} P_1 \text{ in } f(x): \quad 0 &= (a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c) \cdot e^{-(-1)} \\ 0 &= (a - b + c) \cdot e^1 && | :e^1 \\ 0 &= a - b + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 \text{ in } f(x): \quad 3 &= (a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c) \cdot e^{-0} \\ 3 &= (0 + 0 + c) \cdot 1 && \Rightarrow 3 = c \cdot 1 && \Rightarrow \mathbf{c = 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 \text{ in } f(x): \quad 0 &= (a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c) \cdot e^{-3} \\ 0 &= (9a + 3b + c) \cdot e^{-3} && | :e^{-3} \\ 0 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Gleichungen aus P_1 und P_3 und setzen da $c=3$ ein.

$$0 = a - b + 3 \quad \text{bzw.} \quad 0 = 9a + 3b + 3$$

Es handelt sich um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die wir nun irgendwie lösen müssen. Man kann z.B. in der ersten Gleichung nach „ a “ auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen.

$$0 = a - b + 3 \Rightarrow b - 3 = a \quad \text{in zweite Gleichung einsetzen} \Rightarrow$$

$$0 = 9 \cdot (b - 3) + 3b + 3 \Rightarrow 0 = 9b - 27 + 3b + 3 \Rightarrow 0 = 12b - 24 \Rightarrow 24 = 12b \Rightarrow \mathbf{b = 2}$$

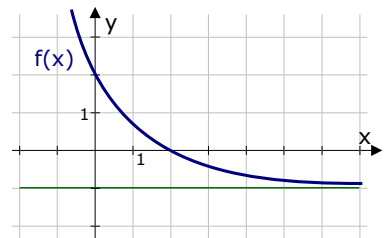
$b=2$ und $c=3$ in die erste Gleichung einsetzen

$$0 = a - 2 + 3 \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow \mathbf{a = -1}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = (-x^2 + 2x + 3) \cdot e^{-x}$

Aufgabe 52

Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, die zum gezeigten Graphen gehört.



Lösung:

Wenn Sie von einer Funktion gar nichts gegeben haben, also keinen Ansatz mit Parameter, wie im

Aufgabe 50 oder Aufgabe 51, so brauchen Sie wahrscheinlich immer nur:

$$f(x) = a + b \cdot e^{kx}$$

Danach setzen Sie Asymptoten und Punkte ein.

In unserem Beispiel sieht man im Schaubild die Asymptote $y = -1$.

Die Funktionsgleichung $f(x) = a + b \cdot e^x$ hat „ $y = a$ “ als Asymptote.

[siehe auch Eselsbrücke von Seite 12]

$$\text{Daher muss gelten: } \mathbf{a = -1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(x) = -1 + b \cdot e^{kx}}$$

Nun gibt es im Schaubild noch zwei Punkte, deren Koordinaten man gut ablesen kann: $P_1(0|2)$ und $P_2(2|0)$

Diese Punkte setzen wir ein.

$$P_1(0|2) \text{ in } f(x): 2 = -1 + b \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow 2 = -1 + b \cdot 1 \Rightarrow 3 = b \Rightarrow$$

$$f(x) = -1 + 3 \cdot e^{k \cdot x}$$

$$P_2(2|0) \text{ in } f(x): 0 = -1 + 3 \cdot e^{k \cdot 2} \Rightarrow 1 = 3 \cdot e^{2k} \Rightarrow 1/3 = e^{2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1/3) = 2k \Rightarrow k = \frac{\ln(1/3)}{2} \approx -0,55 \Rightarrow$$

$$f(x) = -1 + 3 \cdot e^{-0,55 \cdot x}$$

A.41.11 Funktionsanalyse von e-Funktionen (fff)

[wir rechnen alle Aufgaben ohne Verwendung von GTR oder CAS]

Aufgabe 53

$$f(x) = (2x-1) \cdot e^{0,5x+1}$$

Aufgabenstellung:

- Untersuchen Sie $f(x)$ auf Asymptoten, Nullstellen, Hoch-, Tief-, Wendepunkte. Fertigen Sie eine Skizze von $f(x)$.
- Zeige dass $F(x) = (4x-10) \cdot e^{0,5x+1}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von $f(x)$.
- Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von $f(x)$, der Wendetangente und der y -Achse eingeschlossen wird.

(Lösung auf Seite 20)

Aufgabe 54

$$f_t(x) = 2t \cdot e^{-x} - 0,25 \cdot e^{2x} \quad t > 0$$

Aufgabenstellung:

- Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Nullstellen, Extrempunkte, Symmetrie. Skizzieren Sie $f_1(x)$ (1LE = 2cm)
- Bestimmen Sie die Fläche, die von $f_t(x)$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.
- Die Gerade $x=u$ schneidet $f_1(x)$ im Punkt A und die Funktion $g(x) = 2e^{-x}$ in B. Bestimmen Sie $u < 0$ so, dass das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C(0|3) maximalen Flächeninhalt annimmt.

(Lösung auf Seite 22)

Aufgabe 55

$$f(x) = (2 - e^{-x})^2$$

Aufgabenstellung:

- Kurvendiskussion, Zeichnung
- Die Gerade $x=u$ bildet für $u \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x)$ und der waagerechten Asymptote von $f(x)$ eine Fläche $A(u)$. Bestimmen Sie $A(u)$ sowie $\lim_{u \rightarrow +\infty} A(u)$.
- Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunkts der Tangente an $f(x)$ im Kurvenpunkt $A(-\ln(4)|\ddot{u})$ mit der y -Achse.

(Lösung auf Seite 24)

Lösung von Aufgabe 53 (von Seite 19):

a)

Ableitungen [mit Produktregel]:

$$f'(x) = 2 \cdot e^{0,5x+1} + (2x-1) \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x+1} =$$

$$= [2 + (2x-1) \cdot 0,5] \cdot e^{0,5x+1} = [2 + x - 0,5] \cdot e^{0,5x+1} \Rightarrow f'(x) = (x+1,5) \cdot e^{0,5x+1}$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^{0,5x+1} + (x+1,5) \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x+1} =$$

$$= [1 + (x+1,5) \cdot 0,5] \cdot e^{0,5x+1} = [1 + 0,5x + 0,75] \cdot e^{0,5x+1} \Rightarrow f''(x) = (0,5x + 1,75) \cdot e^{0,5x+1}$$

$$f'''(x) = 0,5 \cdot e^{0,5x+1} + (0,5x + 1,75) \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x+1} =$$

$$= [0,5 + (0,5x + 1,75) \cdot 0,5] \cdot e^{0,5x+1} = \dots$$

$$\Rightarrow f'''(x) = (0,25x + 1,375) \cdot e^{0,5x+1}$$

Das hamma ganz toll gemacht!

Asymptoten [= Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$]

$$\text{für } x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty \cdot e^\infty \rightarrow \infty \cdot \infty \rightarrow \infty$$

$$\text{für } x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \cdot e^{-\infty} \rightarrow -\infty \cdot 0 \rightarrow 0$$

Das sagt uns, dass die Funktion am rechten Rand

[bei $x \rightarrow +\infty$] nach oben geht [f(x) $\rightarrow +\infty$]

und am linken Rand der Zeichnung [$x \rightarrow -\infty$] gegen

die x-Achse geht [f(x) $\rightarrow 0$]

Die x-Achse ist also waagerechte Asymptote [für $x \rightarrow -\infty$]

waag. Asy. bei **y=0**

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$(2x-1) \cdot e^{0,5x+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 0$$

$$x_1 = 0,5$$

$$e^{0,5x+1} = 0$$

k.L.

\Rightarrow

N(0,5 | 0)

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$$(x+1,5) \cdot e^{0,5x+1} = 0$$

$$\Rightarrow x+1,5 = 0$$

$$x_1 = -1,5$$

$$e^{0,5x+1} = 0$$

k.L.

überprüfen in $f''(x)$:

$$f''(-1,5) = (0,5 \cdot (-1,5) + 1,75) \cdot e^{0,5 \cdot (-1,5) + 1} = 1,28 \dots > 0 \Rightarrow T(-1,5 | ?)$$

y-Wert: $x = -1,5$ in $f(x)$ einsetzen

$$f(-1,5) = (2 \cdot (-1,5) - 1) \cdot e^{0,5 \cdot (-1,5) + 1} = -4 \cdot e^{0,25} \approx -5,14 \Rightarrow T(-1,5 | -4 \cdot e^{0,25})$$

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$(0,5x+1,75) \cdot e^{0,5x+1} = 0$$

$$\Rightarrow 0,5x+1,75 = 0$$

$$x_1 = -3,5$$

$$e^{0,5x+1} = 0$$

k.L.

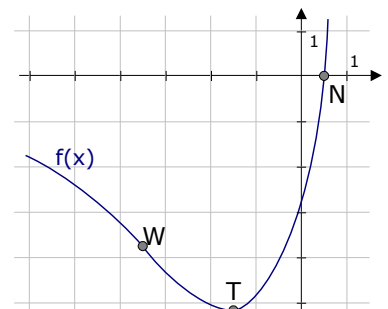
überprüfen in $f'''(x)$

$$f'''(-3,5) = (0,25 \cdot (-3,5) + 1,375) \cdot e^{0,5 \cdot (-3,5) + 1} \approx 0,24 \neq 0 \Rightarrow W(-3,5 | ?)$$

für y-Wert $x = -3,5$ in $f(x)$ einsetzen:

$$f(-3,5) = (2 \cdot (-3,5) - 1) \cdot e^{0,5 \cdot (-3,5) + 1} = -8 \cdot e^{-0,75} \approx -3,78 \Rightarrow W(-3,5 | -8 \cdot e^{-0,75})$$

Zeichnung: \rightarrow



b) Zeigen, dass $F(x) = (4x-10) \cdot e^{0,5x+1}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Dafür könnte man $f(x)$ ableiten und sollte $F(x)$ erhalten. $f(x)$ ist aber ein Produkt aus zwei x -Termen, welches man nur mit der Produktintegration ableiten kann. Wenn Sie die Produktintegration aber nicht gelernt haben oder nicht anwenden möchten, brauchen Sie eine Alternative.

Alternativ könnte man die Stammfunktion $F(x)$ ableiten. Wenn die Ableitung von $F(x)$ wieder $f(x)$ ist, haben wir bewiesen, dass $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ ist.

So wollen wir denn $F(x)$ ableiten. Mit der Produktregel natürlich.

$$\begin{aligned} F'(x) &= (4) \cdot e^{0,5x+1} + (4x-10) \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x+1} = \\ &= [4 + (4x-10) \cdot 0,5] \cdot e^{0,5x+1} = \\ &= [4 + 2x-5] \cdot e^{0,5x+1} = (2x-1) \cdot e^{0,5x+1} = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 4x-10 & \Rightarrow & u' = 4 \\ v &= e^{0,5x+1} & \Rightarrow & v' = 0,5 \cdot e^{0,5x+1} \end{aligned}$$

c) Die Wendetangente ist die Tangente im Wendepunkt.

Man könnte sie über $y=mx+b$ berechnen oder über die Tangentengleichung. Aus unerklärlichen Sympathiegründen bevorzuge ich die Methode über die Tangentengleichung.

$$y_T = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$$

u ist der x -Wert des Wendepunkts, also $u = -3,5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_T &= f'(-3,5) \cdot (x - (-3,5)) + f(-3,5) \\ &= -2 \cdot e^{-0,75} \cdot (x + 3,5) - 8 \cdot e^{-0,75} = \\ &= -2 \cdot e^{-0,75} \cdot x - 7 \cdot e^{-0,75} - 8e^{-0,75} = \end{aligned}$$

Man könnte die Tangentengleichung natürlich auch gerundet, in Kommazahlen angeben. Das wäre dann: $y_T = -0,94x - 7,09$

$$\begin{aligned} f'(-3,5) &= (-3,5 + 1,5) \cdot e^{0,5 \cdot (-3,5) + 1} \\ &= -2 \cdot e^{-0,75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-3,5) &= -8 \cdot e^{-0,75} \\ &\text{(siehe Berechnung des Wendepunktes)} \end{aligned}$$

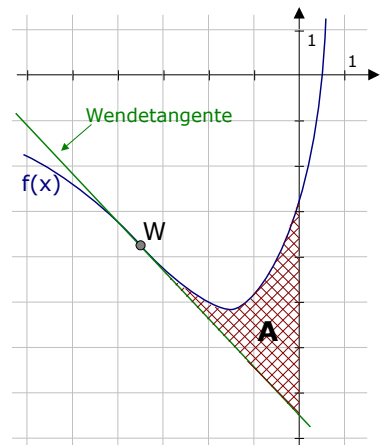
$$y_T = -2 \cdot e^{-0,75} \cdot x - 15 \cdot e^{-0,75}$$

d) Die Fläche, die von $f(x)$, der y -Achse und der Wendetangente eingeschlossen wird, ist in nebenstehender Skizze schraffiert eingezeichnet.

Man berechnet sie natürlich mit dem Integral.

Die Integralgrenzen sind $x = -3,5$ [x -Wert des Wendepunktes] und $x = 0$ [y -Achse], oben wird die Fläche durch $f(x)$ begrenzt, unten durch die Wendetangente y_T .

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \int_{-3,5}^0 f(x) - y_T dx = \\ &= \int_{-3,5}^0 ((2x-1) \cdot e^{0,5x+1}) - (-2e^{-0,75} \cdot x - 15e^{-0,75}) dx = \\ &= \int_{-3,5}^0 (2x-1) \cdot e^{0,5x+1} + 2e^{-0,75} \cdot x + 15e^{-0,75} dx = \\ &\text{[die Stammfunktion von } f(x) \text{ wurde uns schon in Teilaufgabe} \\ &\text{b) angegeben. Es gilt: } \int f(x) dx = F(x) = (4x-10) \cdot e^{0,5x+1}] \\ &= \left[(4x-10) \cdot e^{0,5x+1} + 2e^{-0,75} \cdot \frac{1}{2} x^2 + 15e^{-0,75} \cdot x \right]_{-3,5}^0 = \\ &= \left[(4x-10) \cdot e^{0,5x+1} + e^{-0,75} \cdot x^2 + 15e^{-0,75} \cdot x \right]_{-3,5}^0 = \\ &= [(4 \cdot 0 - 10) \cdot e^{0,5 \cdot 0 + 1} + e^{-0,75} \cdot 0^2 + 15e^{-0,75} \cdot 0] - \\ &\quad [(4 \cdot (-3,5) - 10) \cdot e^{0,5 \cdot (-3,5) + 1} + e^{-0,75} \cdot (-3,5)^2 + 15e^{-0,75} \cdot (-3,5)] = \\ &= [(-10) \cdot e^1 + 0] - [(-24) \cdot e^{-0,75} + 12,25e^{-0,75} - 52,5e^{-0,75}] = \\ &= [-10e] - [-64,25 \cdot e^{-0,75}] = \mathbf{64,25e^{-0,75} - 10e} \approx 3,17 \end{aligned}$$



Schön wars!

Lösung von Aufgabe 54 (von Seite 19):

a)

Ableitungen:

$$f_t'(x) = 2t \cdot (-1) \cdot e^{-x} - 0,25 \cdot 2 \cdot e^{2x} = -2te^{-x} - 0,5e^{2x}$$

$$f_t''(x) = -2t \cdot (-1) \cdot e^{-x} - 0,5 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2te^{-x} - e^{2x}$$

$$f_t'''(x) = 2t \cdot (-1) \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{2x} = -2te^{-x} - 2e^{2x}$$

Asymptoten [Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$]

$$\text{für } x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2t \cdot e^{-\infty} - 0,5 \cdot e^{2 \cdot \infty} \rightarrow 2t \cdot 0 - 0,5 \cdot \infty \rightarrow -\infty$$

$$\text{für } x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2t \cdot e^{+\infty} - 0,5 \cdot e^{2 \cdot (-\infty)} \rightarrow 2t \cdot \infty - 0,5 \cdot 0 \rightarrow +\infty$$

D.h. am rechten Rand unserer Zeichnung geht die Funktion `runter, am linken Rand geht sie hoch.

Nullstellen:

$$f_t(x) = 0$$

$$2te^{-x} - 0,25e^{2x} = 0 \quad \text{umschreiben}$$

$$\frac{2t}{e^x} - 0,25e^{2x} = 0 \quad | \cdot e^x \quad [\text{Nenner wegmachen}]$$

$$2t - 0,25e^{3x} = 0 \quad | + 0,25e^{3x}$$

$$2t = 0,25e^{3x} \quad | : 0,25$$

$$8t = e^{3x} \quad | \ln(\quad)$$

$$\ln(8t) = 3x \quad | : 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln(8t) \quad \Rightarrow$$

$$N\left(\frac{1}{3} \ln(8t) \mid 0\right)$$

Extremstellen:

$$f_t'(x) = 0$$

$$-2te^{-x} - 0,5e^{2x} = 0 \quad \text{umschreiben}$$

$$-\frac{2t}{e^x} - 0,5e^{2x} = 0 \quad | \cdot e^x \quad [\text{Nenner wegmachen}]$$

$$-2t - 0,5e^{3x} = 0 \quad | + 2t$$

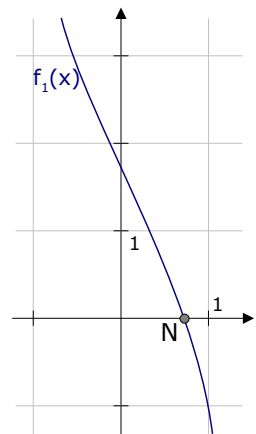
$$-0,5e^{3x} = 2t \quad | : (-0,5)$$

$$e^{3x} = -4t$$

k.Lös. (ein e-Term kann niemals < 0 sein)

\Rightarrow keine Extrempunkte

Zeichnung von $f_1(x)$ \rightarrow



b)

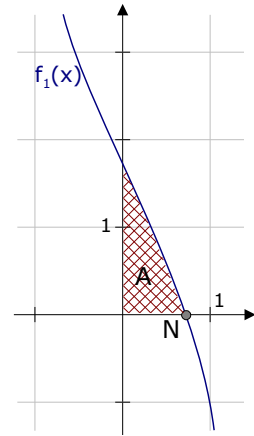
Die Fläche, die von $f_t(x)$, der x- und der y-Achse eingeschlossen wird, ist in der unteren Skizze schraffiert eingezeichnet.

Man berechnet sie natürlich mit dem Integral.

Die Integralgrenzen sind $x=0$ [y-Achse] und $x=\frac{1}{3}\ln(8t)$ [die Nullstelle], oben wird die Fläche durch $f_t(x)$ begrenzt, unten durch die x-Achse.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \int_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} f_t(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} 2te^{-x} - 0,25e^{2x} dx = \\ &= \left[\frac{2t}{-1} \cdot e^{-x} - \frac{0,25}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} = \left[-2t \cdot e^{-x} - 0,125e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-2t \cdot e^{-\frac{1}{3} \ln(8t)} - 0,125 \cdot e^{2 \cdot \frac{1}{3} \ln(8t)} \right] - \left[-2t \cdot e^0 - 0,125 \cdot e^{2 \cdot 0} \right] = (1) \\
 &= \left[-2t \cdot e^{\ln((8t)^{-\frac{1}{3}})} - 0,125 \cdot e^{\ln((8t)^{\frac{2}{3}})} \right] - \left[-2t \cdot 1 - 0,125 \cdot 1 \right] = (2) \\
 &= -2t \cdot (8t)^{-\frac{1}{3}} - 0,125 \cdot (8t)^{\frac{2}{3}} + 2t + 0,125 = (3) \\
 &= -2t \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{1}{3}} - 0,125 \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0,125 = \\
 &= -2t \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{3}} - 0,125 \cdot 4 \cdot t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0,125 = \\
 &= -t^{\frac{2}{3}} - 0,5t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0,125 = \\
 &= -1,5t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0,125 = \\
 &= -1,5 \cdot \sqrt[3]{t^2} + 2t + 0,125
 \end{aligned}$$



c)
Zuerst zeichnet man die Funktion $g(x)=2e^{-x}$ ein, danach die Gerade $x=u$. Letztere ist eine Parallele zur y-Achse, die links von der y-Achse liegt ($u < 0$).

Die Schnittpunkte von $x=u$ mit $f(x)$ bzw. $g(x)$ sind die Punkte A und B. Zusammen mit $C(0|3)$ ist nun ein sehr kleines Dreieck entstanden.

Als Grundlinie des Dreiecks wählt man am besten die Strecke AB. Deren Länge ist die Differenz der y-Werte $AB = g(u) - f_1(u) = 2e^{-u} - (2e^{-u} - 0,25 \cdot e^{2u}) = +0,25e^{2u}$

Die Höhe des Dreiecks ist der [waagrecht gemessene] Abstand vom Eckpunkt C zur Grundseite AB. [Diese Höhe liegt zwar außerhalb des Dreiecks, aber das ist egal]. Diesen Abstand von C zur Strecke AB berechnet man über die Differenz der x-Werte. $\Rightarrow h = x_C - x_A = 0 - u = -u$
Somit erhalten wir für die Fläche des Rechtecks ABC die Flächeninhaltsformel:

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 0,25e^{2u} \cdot (-u) = -0,125u \cdot e^{2u}$$

Berechnet man den maximalen Flächeninhalt, so muss $A'(u)=0$ gesetzt werden.

$$A(u) = -0,125u \cdot e^{2u}$$

$$\begin{aligned}
 A'(u) &= [\text{Produktregel}] = \\
 &= -0,125 \cdot e^{2u} - 0,125u \cdot 2e^{2u} = \\
 &= -0,125 \cdot e^{2u} - 0,25u \cdot e^{2u} = e^{2u} \cdot (-0,125 - 0,25u)
 \end{aligned}$$

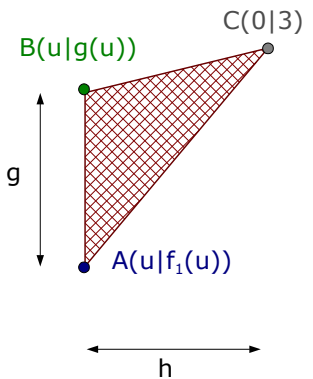
$$A'(u) = 0 \Rightarrow e^{2u} \cdot (-0,125 - 0,25u) = 0$$

$$\begin{aligned}
 e^{2u} &= 0 \\
 \text{k.Lös.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -0,125 - 0,25u &= 0 & | +0,125 & | :(-0,25) \\
 u &= -0,5
 \end{aligned}$$

[Streng genommen müsste man jetzt $u=-0,5$ noch in $A''(u)$ einsetzen und sich davon überzeugen, dass tatsächlich ein *Maximum* vorliegt. Das erspar' ich mir jedoch.]

Für $u=-0,5$ ist der Flächeninhalt von ABC maximal !



Falls man den GTR benutzen dürfte, so könnte man sich ab dieser Stelle einfach das Maximum von $A(u)$ bestimmen lassen.

$$\begin{aligned}
 u &= -0,125 \cdot u & u' &= -0,125 \\
 v &= e^{2u} & v' &= 2 \cdot e^{2u}
 \end{aligned}$$

- 1 Logarithmenregel anwenden: $\frac{1}{3} \ln(8t) = \ln((8t)^{\frac{1}{3}})$
- 2 Logarithmenregel anwenden: $e^{\ln(A)} = A$
- 3 $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$

Lösung von Aufgabe 55 (von Seite 19):

Ableitungen:

für die erste Ableitung gibt es zwei Möglichkeiten:

- $f(x)$ ausbinomieren und dann ganz normal ableiten:

$$f(x) = 4 - 4e^{-x} + e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = +4e^{-x} + (-2)e^{-2x}$$

- $f'(x)$ mit der Kettenregel berechnen

$$f(x) = (2 - e^{-x})^2 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2 \cdot (2 - e^{-x})^1 \cdot e^{-x} = 4e^{-x} - 2e^{-2x}$$

innerer Term: $2 - e^{-x}$

innere Ableitung: $+e^{-x}$

$$f''(x) = 4 \cdot (-1) \cdot e^{-x} - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -4e^{-x} + 4e^{-2x}$$

$$f'''(x) = -4 \cdot (-1) \cdot e^{-x} + 4 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = 4e^{-x} - 8e^{-2x}$$

Asymptoten [Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$]

$$\text{für } x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (2 - e^{-\infty})^2 \rightarrow (2 - 0)^2 \rightarrow 4$$

$$\text{für } x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow (2 - e^{+\infty})^2 \rightarrow (2 - \infty)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

D.h. am rechten Rand der Zeichnung geht die Funktion gegen $y=4$, am linken Rand der Zeichnung geht sie hoch.

\Rightarrow waagerechte Asymptote bei **$y = 4$**

Nullstellen:

Wir haben $f(x)$ in zwei Darstellungsformen:

Erstens $f(x) = (2 - e^{-x})^2$ und zweitens $f(x) = 4 - 4e^{-x} + e^{-2x}$.

Die letzte Form ist dabei etwas ungeschickter, man müsste $e^{-x} = z$ substituieren.

Die erste Form ist daher besser.

$$f(x) = 0$$

$$(2 - e^{-x})^2 = 0$$

| $\sqrt{\quad}$

$$2 - e^{-x} = 0$$

| $+e^{-x}$

$$2 = e^{-x}$$

| $\ln(\dots)$

$$\ln(2) = -x \Rightarrow x = -\ln(2) \Rightarrow$$

N ($-\ln(2)$ | 0)

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4e^{-x} - 2e^{-2x} = 0 \quad (2e^{-x} \text{ ausklammern})$$

$$2e^{-x} \cdot (2 - e^{-x}) = 0$$

$$2e^{-x} = 0$$

$$2 - e^{-x} = 0$$

k.Lös.

$$e^{-x} = 2$$

$$-x = \ln(2) \Rightarrow x = -\ln(2)$$

überprüfen in $f''(x)$:

$$f''(-\ln(2)) = -4e^{+\ln(2)} + 4e^{+2 \cdot \ln(2)} = -4e^{\ln(2)} + 4e^{\ln(2^2)} = \quad (1)$$

$$= -4 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = -8 + 16 = +8 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$y\text{-Wert: } f(-\ln(2)) = (2 - e^{+\ln(2)})^2 = (2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow$$

T ($-\ln(2)$ | 0)

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$-4e^{-x} + 4e^{-2x} = 0 \quad (4e^{-x} \text{ ausklammern})$$

$$4e^{-x} \cdot (-1 + e^{-x}) = 0$$

1 Logarithmenregeln: $A \cdot \ln(B) = \ln(B^A)$ und $e^{\ln(A)} = A$

$$4e^{-x} = 0 \quad -1 + e^{-x} = 0$$

$$\text{k.Lös.} \quad e^{-x} = 1$$

$$-x = \ln(1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

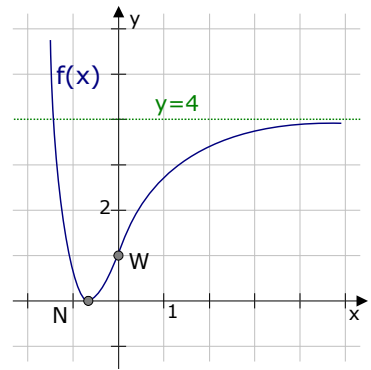
überprüfen in $f'''(x)$:

$$f'''(0) = 4e^0 - 8e^0 = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

y-Wert: $f(0) = (2 - e^0)^2 = (2 - 1)^2 = 1$

\Rightarrow **W (0 | 1)**

Zeichnung \rightarrow



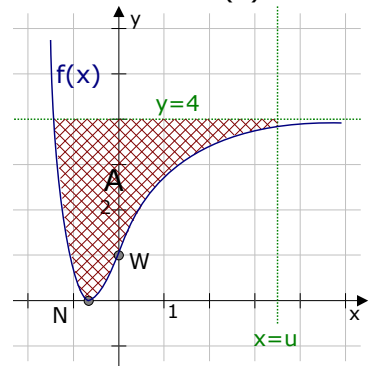
b) Die Gerade $x=u$ ist eine senkrechte Gerade.

Die waagerechte Asymptote haben wir bereits in Teilaufgabe a) berechnet. (Hätten wir das vorher nicht gemacht, müssten wir 's an dieser Stelle nachholen).

Diese waagerechte Asymptote ist $y=4$.
(Die Fläche zwischen $y=4$, $f(x)$ und $x=u$ ist rechts eingezeichnet.)

Die Fläche wird oben durch $y=4$ begrenzt, unten durch die Funktion $f(x)$. Die rechte Integralgrenze ist bei $x=u$, die linke Integralgrenze ist beim Schnittpunkt, welchen wir dummerweise noch nicht haben.

Also berechnen wir den Schnittpunkt von $f(x)$ mit der Geraden $y=4$.



$$f(x) = 4$$

$$(2 - e^{-x})^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$2 - e^{-x} = \pm 2$$

$$2 - e^{-x} = -2 \quad \rightarrow \quad 2 - e^{-x} = +2$$

$$-e^{-x} = -4 \quad \rightarrow \quad -e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = 4 \quad \rightarrow \quad \text{k.Lös.}$$

$$-x = \ln(4)$$

$$x = -\ln(4) \quad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt bei } x = -\ln(4)$$

$$A(u) = \int_{-\ln(4)}^u 4 - f(x) dx = \int_{-\ln(4)}^u 4 - (2 - e^{-x})^2 dx =$$

$$= \int_{-\ln(4)}^u 4 - (4 - 4e^{-x} + e^{-2x}) dx = \int_{-\ln(4)}^u 4e^{-x} - e^{-2x} dx =$$

$$= \left[-4e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_{-\ln(4)}^u = \left[-4e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_{-\ln(4)}^u =$$

$$= \left[-4e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u} \right] - \left[-4e^{+\ln(4)} + \frac{1}{2}e^{+2\ln(4)} \right] = (1)$$

$$= \left[-4e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u} \right] - \left[-4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right] =$$

$$= \left[-4e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u} \right] - [-16 + 8] = -4e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u} + 8 \quad \Rightarrow \quad A(u) = -4e^{-u} + \frac{1}{2}e^{-2u} + 8$$

Das Binom *muss* aufgelöst werden, da die innere Ableitung nicht nur eine Zahl ist. Die hintere Klammer könnte man auch in den GTR eintippen, falls der GTR bei der Aufgabe erlaubt ist.

Wenn man mal $A(u)$ bestimmt hat, ist $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$ gar nicht mehr so schwer. Man denkt sich statt dem „u“

1 Logarithmenregeln: $A \cdot \ln(B) = \ln(B^A)$ und $e^{\ln(A)} = A$

ein „ ∞ “ und hält sich vor Augen, dass $e^{-\infty} \rightarrow 0$ geht.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} -4 \cdot e^{-u} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2u} + 8 = -4 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 8 = 8 \quad \Rightarrow \quad \lim_{u \rightarrow \infty} A(u) = 8$$

c) Man muss die Gleichung der Tangente natürlich von Hand rechnen [also ohne GTR oder CAS], da die exakten Koordinaten des Schnittpunktes gefragt sind.

Wir bemühen die Tangentengleichung... [der Ansatz über $y=m \cdot x+b$ wäre auch möglich]

$$y_{\text{Tang}} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$$

u ist der Berührungspunkt der Tangente, das ist der x -Wert von $A \Rightarrow u = -\ln(4)$.

$$\Rightarrow f'(u) = f'(-\ln(4)) = 4e^{+\ln(4)} - 2e^{+2 \cdot \ln(4)} = 4e^{\ln(4)} - 2e^{\ln(4^2)} \stackrel{(1)}{=} 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -16$$

$$\Rightarrow f(u) = f(-\ln(4)) = (2 - e^{+\ln(4)})^2 = (2 - 4)^2 = (-2)^2 = 4$$

$u = -\ln(4)$, $f'(u) = -16$ und $f(u) = 4$ in y_{Tang} einsetzen ...

$$\Rightarrow y_{\text{Tang}} = -16 \cdot (x - (-\ln(4))) + 4 = -16 \cdot (x + \ln(4)) + 4 \quad \Rightarrow \quad y = -16x - 16\ln(4) + 4$$

Den Schnittpunkt der Tangente mit der y -Achse erhält man, indem man $x=0$ in die Tangente einsetzt. [Jeder Punkt auf der y -Achse hat den x -Wert $x=0$.]

$x=0$ in die Tangentengleichung:

$$\Rightarrow y_{\text{Tang}} = -16 \cdot 0 - 16 \cdot \ln(4) + 4 = -16 \cdot \ln(4) + 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_y(0 | -16 \cdot \ln(4) + 4)}$$